1. Пусть $J(\cdot)$ — функция Жуковского. При каких $z \in \overline{\mathbb{C}}$ существует и конечен предел $\lim_{n\to\infty} J^{\{n\}}(z)$, где $J^{\{n\}} = J \circ \cdots (n \text{ раз}) \cdots \circ J$.

•2. Пусть γ — произвольная замкнутая кривая в $\mathbb{C}$, не проходящая через некоторую точку $a \in \mathbb{C}$. Пусть $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_N$ — такое разбиение γ в сумму последовательных дуг, что каждая дуга γ_k, $k = 1 \ldots N$, целиком содержится в некотором (открытом) круге D_k, не содержащем точку a. Обозначим через λ_k, $k = 1 \ldots N$, отрезок, соединяющий начало и конец дуги γ_k, и положим $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$.

а) Доказать, что для любых двух ломаных λ' и λ'', построенных указанным выше образом верно равенство $\operatorname{ind}_a \lambda' = \operatorname{ind}_a \lambda''$.

б) Доказать, что если γ — это кусочно-гладкая кривая, то $\operatorname{ind}_a \lambda = \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

3. Найти круги сходимости рядов $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n^k z^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(2z-i)^n$. Показать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{inz}$ сходится локально равномерно в верхней полуплоскости и расходится в нижней.

4. а) Проверить, что справедливо разложение $\displaystyle\frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}$, $|z| < |a|$, $a \neq 0$.

б) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ данные функции и найти радиус сходимости соответствующих рядов (в последнем выражении $\sqrt{z}$ и $\ln z$ — это главные значения корня и логарифма)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}; \qquad f(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}, \quad f(0) = 1.$$

•5. Пусть $f \in Hol(\varepsilon\mathbb{D})$, $\varepsilon > 0$, и пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)$ сходится. Доказать, что существует функция $F \in Hol(\mathbb{C})$ такая, что $F(z) = f(z)$ при $z \in \varepsilon\mathbb{D}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(z)$ сходится в $\mathbb{C}$ локально равномерно. Привести пример такой функции, отличной от многочлена.

•6. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) Пусть $f \in Hol(\mathbb{C})$ и для любого $z \in \mathbb{C}$ выполнено $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$. Тогда функция f постоянна.

б) Пусть $f, g \in Hol(\mathbb{C})$ и для всех $z \in \mathbb{C}$ выполнено $|f(z)| \leqslant |g(z)|$. Тогда $f = Ag$, где A — некоторая константа.

7. Вычислив и оценив интеграл $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$ при $|a| < R$ и $|b| < R$ доказать теорему Лиувилля: ограниченная и голоморфная функция в $\mathbb{C}$ является константой.

•8. Пусть G — некоторая ограниченная область в $\mathbb{C}$, а $f_1, \ldots, f_m \in Hol(G)$. Положим

$$M := \limsup_{z\to\partial G} (|f(z_1)| + \cdots + |f(z_m)|).$$

Показать, что если хотя бы одна функция f_k — не тождественная константа, то для любой точки $z \in G$ выполнено $|f_1(z)| + \cdots + |f_m(z)| < M$.

9. Пусть $\gamma(t)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — простой замкнутый кусочно-гладкий путь, внутренность носителя которого содержит точку 0. Пусть $z_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную ветвь $L(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ вдоль γ. Для функции $f \in Hol(\overline{D(\gamma)})$ вычислить $\displaystyle\int_\gamma f'(z)L(z)dz$.

10. Пусть G — жорданова область с кусочно-гладкой границей Γ, пусть U — некоторая окрестность Γ, а функция $\varphi \in Hol(U)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) существует функция $f \in Hol(\overline{G})$ такая, что $f|_\Gamma = \varphi$;

б) для любой точки $a \notin \overline{G}$ выполнено $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} = 0$.