Теорема о простых геодезических

Ольга Балканова

Москва, 2021

Теоремы о простых числах и простых геодезических

Теорема о простых числах (Hadamard, de la Vallée Poussin 1896)

$$\pi(X) = \#\{p \text{ простое}, \ p \leq X\} \sim \mathbf{Li}(X), \quad \mathbf{Li}(X) = \int_2^X \frac{dt}{\mathbf{ln}(t)}.$$

Теоремы о простых числах и простых геодезических

Теорема о простых числах (Hadamard, de la Vallée Poussin 1896)

$$\pi(X) = \#\{p \text{ простое}, \ p \leq X\} \sim \mathbf{Li}(X), \quad \mathbf{Li}(X) = \int_2^X \frac{dt}{\mathbf{ln}(t)}.$$

Теорема о простых геодезических (Selberg 1956, Huber 1961)

$\pi_\Gamma(X) = \#\{l$ - замкнутая геодезическая на M, длина$(l) \leq X\} \sim \mathbf{Li}(X)$,

где $M = \Gamma \setminus \mathbb{H}$ - модулярная поверхность, $\mathbb{H} = \{\Im z > 0\}$ - верхняя полуплоскость, $\Gamma = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ - модулярная группа.

Дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \Re s > 1.$$

- $\zeta(s)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \Re s > 1.$$

- $\zeta(s)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Функциональное уравнение:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \Re s > 1.$$

- $\zeta(s)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Функциональное уравнение:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

- Тривиальные нули: $s = -2, -4, -6, \ldots$.

Дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \Re s > 1.$$

- $\zeta(s)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Функциональное уравнение:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

- Тривиальные нули: $s = -2, -4, -6, \ldots$.
- Все нетривиальные нули расположены в $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re s \leq 1\}$.

Дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \Re s > 1.$$

- $\zeta(s)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Функциональное уравнение:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

- Тривиальные нули: $s = -2, -4, -6, \ldots$.
- Все нетривиальные нули расположены в $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re s \leq 1\}$.
- Гипотеза Римана: $\Re s = 1/2$ для всех нетривиальных нулей $\zeta(s)$.

Дзета функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ \text{простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \Re s > 1.$$

- $\zeta(s)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Функциональное уравнение:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

- Тривиальные нули: $s = -2, -4, -6, \ldots$.
- Все нетривиальные нули расположены в $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re s \leq 1\}$.
- Гипотеза Римана: $\Re s = 1/2$ для всех нетривиальных нулей $\zeta(s)$.
- Pratt, Robles, Zaharescu, Zeindler 2020: не менее 41.7293% нетривиальных нулей $\zeta(s)$ расположены на $\Re s = 1/2$.

Оценка остатка в теореме о простых числах

В предположении гипотезы Римана (von Koch 1901):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O(\sqrt{X} \log X).$$

Оценка остатка в теореме о простых числах

В предположении гипотезы Римана (von Koch 1901):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O(\sqrt{X} \log X).$$

Наилучший безусловный результат (Виноградов, Коробов 1958):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O\left(X \exp\left(-c_0 \frac{(\log X)^{3/5}}{(\log\log X)^{1/5}}\right)\right).$$

Оценка остатка в теореме о простых числах

В предположении гипотезы Римана (von Koch 1901):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O(\sqrt{X}\log X).$$

Наилучший безусловный результат (Виноградов, Коробов 1958):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O\left(X\exp\left(-c_0\frac{(\log X)^{3/5}}{(\log\log X)^{1/5}}\right)\right).$$

Точная формула (Riemann 1859, Von Mangoldt 1905):

$$\Psi(X) := \sum_{\substack{p \text{ простое},\ m\geq 1\\ p^m\leq X}} \log p = X - \sum_{\rho:\zeta(\rho)=0}\frac{X^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Оценка остатка в теореме о простых числах

В предположении гипотезы Римана (von Koch 1901):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O(\sqrt{X}\log X).$$

Наилучший безусловный результат (Виноградов, Коробов 1958):

$$\pi(X) = \mathbf{Li}(X) + O\left(X\exp\left(-c_0\frac{(\log X)^{3/5}}{(\log\log X)^{1/5}}\right)\right).$$

Точная формула (Riemann 1859, Von Mangoldt 1905):

$$\Psi(X) := \sum_{\substack{p \text{ простое}, \ m\geq 1 \\ p^m \leq X}} \log p = X - \sum_{\rho:\zeta(\rho)=0} \frac{X^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Количество нулей $\zeta(s)$ в области $\{s : 0 \leq \Re s \leq 1, |\Im s| \leq T\}$:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2e}\right) + O(\log T).$$

Примитивные гиперболические классы

Элемент $P \in \Gamma$ называется гиперболическим, если дробно-линейное преобразование

$$Pz = \frac{az + b}{cz + d}$$

имеет две различные фиксированные точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Примитивные гиперболические классы

Элемент $P \in \Gamma$ называется гиперболическим, если дробно-линейное преобразование

$$Pz = \frac{az + b}{cz + d}$$

имеет две различные фиксированные точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
При помощи сопряжения любой гиперболический элемент P может быть записан в следующем виде

$$P = \sigma^{-1} P' \sigma, \text{ где } \sigma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}), \quad P' = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}.$$

Примитивные гиперболические классы

Элемент $P \in \Gamma$ называется гиперболическим, если дробно-линейное преобразование

$$Pz = \frac{az+b}{cz+d}$$

имеет две различные фиксированные точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
При помощи сопряжения любой гиперболический элемент P может быть записан в следующем виде

$$P = \sigma^{-1} P' \sigma, \text{ где } \sigma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}), \quad P' = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}.$$

Заметим, что P' действует на $\mathbb{H}$ следующим образом $P'z = t^2 z$.

Примитивные гиперболические классы

Элемент $P \in \Gamma$ называется гиперболическим, если дробно-линейное преобразование

$$Pz = \frac{az + b}{cz + d}$$

имеет две различные фиксированные точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
При помощи сопряжения любой гиперболический элемент P может быть записан в следующем виде

$$P = \sigma^{-1} P' \sigma, \text{ где } \sigma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}), \quad P' = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}.$$

Заметим, что P' действует на $\mathbb{H}$ следующим образом $P'z = t^2 z$.
Множитель $NP := t^2$ называется нормой P и он зависит только от $\{P\}$ класса элементов сопряженных к P.

Примитивные гиперболические классы

Элемент $P \in \Gamma$ называется гиперболическим, если дробно-линейное преобразование

$$Pz = \frac{az+b}{cz+d}$$

имеет две различные фиксированные точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
При помощи сопряжения любой гиперболический элемент P может быть записан в следующем виде

$$P = \sigma^{-1} P' \sigma, \text{ где } \sigma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}), \quad P' = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}.$$

Заметим, что P' действует на $\mathbb{H}$ следующим образом $P'z = t^2 z$.
Множитель $NP := t^2$ называется нормой P и он зависит только от $\{P\}$ класса элементов сопряженных к P.
Мы будем называть P и $\{P\}$ примитивными, если они не являются степенью другого элемента или класса соответственно.

Геодезические

- $\mathbb{H}$ - модель верхней полуплоскости с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.
- Геодезические на $\mathbb{H}$: вертикальные линии и полуокружности перпендикулярные вещественной оси.
- Существует единственная геодезическая, соединяющая две точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Геодезические

- $\mathbb{H}$ - модель верхней полуплоскости с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.
- Геодезические на $\mathbb{H}$: вертикальные линии и полуокружности перпендикулярные вещественной оси.
- Существует единственная геодезическая, соединяющая две точки в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- Примитивный гиперболический элемент $P \in \Gamma$ переводит геодезическую, соединяющую две фиксированные точки P, саму в себя и порождает замкнутую геодезическую длины $\log NP$ на $\Gamma \setminus \mathbb{H}$.
- Любой элемент, сопряженный к P, порождает ту же геодезическую.

Бинарные квадратичные формы

Рассмотрим множество квадратичных примитивных форм $Q(x, y) = [a, b, c] = ax^2 + bxy + cy^2$ с дикриминатом $d = b^2 - 4ac > 0$, d не является квадратом, $d \equiv 0, 1 \pmod 4$.

Бинарные квадратичные формы

Рассмотрим множество квадратичных примитивных форм $Q(x, y) = [a, b, c] = ax^2 + bxy + cy^2$ с дикриминатом $d = b^2 - 4ac > 0$, d не является квадратом, $d \equiv 0, 1 \pmod 4$.
Группа Γ действует на данном множестве следующим образом

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} Q\right)(x, y) = Q(\alpha x + \beta y, \delta x + \gamma y).$$

Две квадратичные формы называются эквивалентными, если они принадлежат одной орбите.

Бинарные квадратичные формы

Рассмотрим множество квадратичных примитивных форм $Q(x,y) = [a,b,c] = ax^2 + bxy + cy^2$ с дикриминатом $d = b^2 - 4ac > 0$, d не является квадратом, $d \equiv 0, 1 \pmod 4$.
Группа Γ действует на данном множестве следующим образом

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} Q\right)(x,y) = Q(\alpha x + \beta y, \delta x + \gamma y).$$

Две квадратичные формы называются эквивалентными, если они принадлежат одной орбите. Пусть h_d - число неэквивалентных классов таких форм с фиксированным дискриминантом d.
Стабилизатор $[a,b,c]$ в Γ состоит из примитивных гиперболических матриц с нормой ϵ_d^2, где

$$\epsilon_d = \frac{1}{2}(n + \sqrt{d}m)$$

- наименьшее решение (> 1) уравнения Пелля $n^2 - dm^2 = 4$.

Взаимооднозначное соответствие

$$\left\{\begin{array}{c}\text{классы примитивных}\\ \text{квадратичных форм}\\ \text{дискриминанта d}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{классы примитивных}\\ \text{гиперболических}\\ \text{элементов } \Gamma\\ \text{с нормой } \epsilon_d^2\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{классы } \{P\} \text{ примитивных}\\ \text{гиперболических}\\ \text{элементов } \Gamma\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{замкнутые геодезические}\\ \text{длины } \log NP \text{ на } \Gamma\backslash\mathbb{H}\end{array}\right\}$$

Следствие: длины замкнутых геодезических на $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ соответствуют числам $2\log\epsilon_d$ с мультипликативностью h_d.

Дзета функция Сельберга

В 1956 Selberg изучал следующую дзета-функцию

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{\{P_0\}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - NP_0^{-s-k}), \quad \Re s > 1,$$

где внешнее произведение берётся по всем примитивным гиперболическим классам группы Γ.
Нормы NP_0 иногда называют "псевдопростыми числами".

Дзета функция Сельберга

В 1956 Selberg изучал следующую дзета-функцию

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{\{P_0\}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - NP_0^{-s-k}), \quad \Re s > 1,$$

где внешнее произведение берётся по всем примитивным гиперболическим классам группы Γ.
Нормы NP_0 иногда называют "псевдопростыми числами".
Теорема о простых геодезических может быть сформулирована в следующем виде:

$$\pi_\Gamma(X) = \#\{\{P_0\} - \text{ прим. гиперб. класс}, NP_0 \leq X\} \sim \mathbf{Li}(X).$$

Формы Маасса

Формой Маасса для группы Γ называется комплекснозначная гладкая функция f на $\mathbf{H}$, удовлетворяющая условиям:

- $f(\gamma z) = f(z)$ для $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$;
- существует $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ такое, что $\Delta f = \kappa f$, где
$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right);$$
- существует $c > 0$ такое, что $f(x+iy) = O(y^c)$ при $y \to \infty$.

Формы Маасса

Формой Маасса для группы Γ называется комплекснозначная гладкая функция f на $\mathbf{H}$, удовлетворяющая условиям:

- $f(\gamma z) = f(z)$ для $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$;
- существует $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ такое, что $\Delta f = \kappa f$, где
$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right);$$
- существует $c > 0$ такое, что $f(x+iy) = O(y^c)$ при $y \to \infty$.

Операторы Гекке:

$$T_n f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \le b < d}} f\left(\frac{az+b}{d} \right).$$

Базис форм Маасса

Обозначим за $\{u_j\}$ ортонормированнный базис форм Маасса, состоящий из собственных значений всех операторов Гекке и гиперболического Лапласиана.

Базис форм Маасса

Обозначим за $\{u_j\}$ ортонормированнный базис форм Маасса, состоящий из собственных значений всех операторов Гекке и гиперболического Лапласиана.
Пусть $\{\lambda_j(n)\}$ обозначает собственные значения операторов Гекке действующих на u_j.

Базис форм Маасса

Обозначим за $\{u_j\}$ ортонормированнный базис форм Маасса, состоящий из собственных значений всех операторов Гекке и гиперболического Лапласиана.
Пусть $\{\lambda_j(n)\}$ обозначает собственные значения операторов Гекке действующих на u_j.
Пусть $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$ обозначает собственные значения гиперболического Лапласиана действующего на u_j.

Базис форм Маасса

Обозначим за $\{u_j\}$ ортонормированнный базис форм Маасса, состоящий из собственных значений всех операторов Гекке и гиперболического Лапласиана.

Пусть $\{\lambda_j(n)\}$ обозначает собственные значения операторов Гекке действующих на u_j.

Пусть $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$ обозначает собственные значения гиперболического Лапласиана действующего на u_j.

Элементы данного базиса имеют следующее разложение Фурье

$$u_j(x+iy) = \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} \rho_j(n) K_{it_j}(2\pi |n| y) e(nx),$$

где $K_\alpha(x)$ - это K-функция Бесселя,

$$\rho_j(n) = \rho_j(1)\lambda_j(n).$$

Свойства дзета-функции Сельберга

- $Z_\Gamma(s)$ допускает мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$.
- $Z_\Gamma(s)$ удовлетворяет уравнению вида $Z_\Gamma(1-s) = \alpha(s) Z_\Gamma(s)$.

Свойства дзета-функции Сельберга

- $Z_\Gamma(s)$ допускает мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$.
- $Z_\Gamma(s)$ удовлетворяет уравнению вида $Z_\Gamma(1-s) = \alpha(s) Z_\Gamma(s)$.
- Нетривиальные нули в $s = \rho_j/2$, где $\rho_j = \beta_j + i\gamma_j$ - комплексные нули дзета функции Римана.

Свойства дзета-функции Сельберга

- $Z_\Gamma(s)$ допускает мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$.
- $Z_\Gamma(s)$ удовлетворяет уравнению вида $Z_\Gamma(1-s) = \alpha(s)Z_\Gamma(s)$.
- Нетривиальные нули в $s = \rho_j/2$, где $\rho_j = \beta_j + i\gamma_j$ - комплексные нули дзета функции Римана.
- Нетривиальные нули в $s = s_j = 1/2 + it_j$, где $\kappa_j = s_j(1-s_j)$ - собственные значения гиперболического Лапласиана Δ для форм Маасса.

Свойства дзета-функции Сельберга

- $Z_\Gamma(s)$ допускает мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$.
- $Z_\Gamma(s)$ удовлетворяет уравнению вида $Z_\Gamma(1-s) = \alpha(s) Z_\Gamma(s)$.
- Нетривиальные нули в $s = \rho_j/2$, где $\rho_j = \beta_j + i\gamma_j$ - комплексные нули дзета функции Римана.
- Нетривиальные нули в $s = s_j = 1/2 + it_j$, где $\kappa_j = s_j(1 - s_j)$ - собственные значения гиперболического Лапласиана Δ для форм Маасса.
- Для $Z_\Gamma(s)$ выполнена гипотеза Римана!

Первые результаты

Huber, Hejhal, Sarnak, Selberg, Woo, Венков, Кузнецов получали результаты вида

$$\pi_\Gamma = \mathsf{Li}(X) + E_\Gamma(X) \text{ , где } E_\Gamma(X) = O(X^{3/4} \log X^A).$$

Первые результаты

Huber, Hejhal, Sarnak, Selberg, Woo, Венков, Кузнецов получали результаты вида

$$\pi_\Gamma = \mathrm{Li}(X) + E_\Gamma(X) \text{ , где } E_\Gamma(X) = O(X^{3/4}\log X^A).$$

В 1984 году Iwaniec впервые улучшил экспоненту $3/4$ в остатке, разработав новый метод, который позволил свести задачу к изучению моментов L-функций Ранкина-Сельберга

$$L(u_j \otimes u_j, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\rho_j(n)|^2}{n^s}, \Re s > 1$$

и сумм сумм Клоостермана

$$S(m,n,c) = \sum_{\substack{a \pmod c \\ (a,c)=1}} e\left(\frac{ma+na^*}{c}\right), \quad aa^* \equiv 1 \pmod c.$$

Точная формула

Удобно работать с функцией

$$\Psi_\Gamma(X) = \sum_{NP \le X} \Lambda(P),$$

где $\Lambda(P) = \log NP_0$, если $\{P\}$- это степень примитивного гиперболического класса $\{P_0\}$.
Iwaniec показал, что для $1 \le T \le X^{1/2} \log^{-2}(X)$ выполнена следующая формула:

$$\Psi_\Gamma(X) = X + X^{1/2} \sum_{|t_j| \le T} \frac{X^{it_j}}{1/2 + it_j} + O\left(\frac{X}{T} \log^2 X\right),$$

где $s_j = 1/2 + it_j$ пробегает нули $Z_\Gamma(s)$ на прямой $\Re s = 1/2$.

Спектральная экспоненциальная сумма

Для улучшения оценки остатка требуется исследовать спектральную экспоненциальную сумму

$$S(T,X) := \sum_{|t_j|\le T} X^{it_j}.$$

Закон Вейля:

$$\#\{j : |t_j| \le T\} = T^2/12 + c_1 T \log T + O(T).$$

Из закона Вейля следует, что $S(T,X) \ll T^2$.

Схема доказательства Иванца: шаг 1

Пусть $h(x)$ гладкая функция с компактным носителем на $[N, 2N]$,

$$|h^{(j)}(x)| \ll N^{-j}, \text{ for } j = 0, 1, 2, \ldots \int_0^\infty h(x)dx = N.$$

Схема доказательства Иванца: шаг 1

Пусть $h(x)$ гладкая функция с компактным носителем на $[N, 2N]$,

$$|h^{(j)}(x)| \ll N^{-j}, \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots \int_0^\infty h(x)dx = N.$$

Рассмотрим выражение вида

$$\sum_n h(n) \sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} X^{it_j} \exp(-t_j/T).$$

Схема доказательства Иванца: шаг 1

Пусть $h(x)$ гладкая функция с компактным носителем на $[N, 2N]$,

$$|h^{(j)}(x)| \ll N^{-j}, \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots \int_0^\infty h(x)dx = N.$$

Рассмотрим выражение вида

$$\sum_n h(n) \sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} X^{it_j} \exp(-t_j/T).$$

Так как

$$Res_{s=1} L(u_j \otimes u_j, s) = \frac{2}{\zeta(2)} \cosh(\pi t_j),$$

получаем

$$\sum_n h(n) \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} = \frac{2}{\zeta(2)} N + \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \tilde{h}(s) \frac{L(u_j \otimes u_j, s)}{\cosh(\pi t_j)} ds.$$

Схема доказательства Иванца: шаг 2

Таким образом, мы получили

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) = \frac{\zeta(2)}{2N} \sum_n h(n) \sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} X^{it_j} \exp(-t_j/T)$$
$$- \frac{\zeta(2)}{2N} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \tilde{h}(s) \sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \frac{L(u_j \otimes u_j, s)}{\cosh(\pi t_j)} ds.$$

Схема доказательства Иванца: шаг 2

Таким образом, мы получили

$$\sum_j X^{it_j}\exp(-t_j/T) = \frac{\zeta(2)}{2N}\sum_n h(n)\sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} X^{it_j}\exp(-t_j/T)$$
$$-\frac{\zeta(2)}{2N}\frac{1}{2\pi i}\int_{(1/2)}\tilde{h}(s)\sum_j X^{it_j}\exp(-t_j/T)\frac{L(u_j\otimes u_j,s)}{\cosh(\pi t_j)}ds.$$

Пусть

$$\varphi(x) := \frac{\sinh\beta}{\pi}x\exp(ix\cosh\beta), \quad \beta := \frac{1}{2}\log X + \frac{i}{2T}.$$

Для этой функции Iwaniec заметил, что преобразование

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{\pi i}{2\sinh(\pi t)}\int_0^\infty (J_{2it}(x) - J_{-2it}(x))\varphi(x)\frac{dx}{x}$$

приближает $X^{it}\exp(-t/T)$.

Частный случай формулы следа Кузнецова

Для $n \geq 1$ выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} \hat{\varphi}(t_j) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau_{ir}(n)^2}{|\zeta(1+2ir)|^2} \hat{\varphi}(r) dr =$$

$$\varphi_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(n,n;q)}{q} (\varphi - \varphi_B) \left(\frac{4\pi n}{q} \right),$$

где

$$\hat{\varphi}(t) = X^{it} \exp(-t/T) + O(\exp(-\pi t)), \quad \varphi_0 = \frac{-\cosh\beta}{2\pi^2 \sinh^2\beta},$$

$$\tau_v(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^v .$$

Известные результаты

- 1984 Iwaniec: $E_\Gamma(X) \ll X^{2/3+1/16+\epsilon}$.
- 1995 Luo-Sarnak: $E_\Gamma(X) \ll X^{2/3+1/30+\epsilon}$.
- 2002 Cai: $E_\Gamma(X) \ll X^{2/3+1/34+\epsilon}$.
- 2013 Soundararajan-Young: $E_\Gamma(X) \ll X^{2/3+\theta/6+\epsilon}$ с $\theta = 1/6$.
- 2017 Cherubini-Guerreiro: $\frac{1}{A}\int_A^{2A} |E_\Gamma(X)|^2 dX \ll A^{1+1/4+\epsilon}$.
- 2019 Balog-Biró-Harcos-Maga: $\frac{1}{A}\int_A^{2A} |E_\Gamma(X)|^2 dX \ll A^{1+1/6+\epsilon}$.
- 1994 Быковский: для $X^{1/2+\epsilon} \le h \le X$ справедлива формула

$$\pi_\Gamma(X+h) - \pi_\Gamma(X) \sim \frac{h}{\log X}.$$

Результат Luo-Sarnak

L-функция симметрического квадрата

$$L(\mathsf{sym}^2 u_j, s) := \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(n^2)}{n^s}, \quad \Re s > 1.$$

Заметим, что

$$L(u_j \otimes u_j, s) = |\rho_j(1)|^2 \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} L(\mathsf{sym}^2 u_j, s).$$

Luo-Sarnak доказали следующую "гипотезу Линделёфа в среднем": для $s = 1/2 + ir$, $r \ll T^{\epsilon}$

$$\sum_{T < t_j < 2T} \alpha_j |L(\mathsf{sym}^2 u_j, 1/2 + ir)|^2 \ll T^{2+\epsilon}, \quad \alpha_j := \frac{|\rho_j(1)|^2}{\cosh \pi t_j}.$$

Формула Кузнецова

В 1978 году Кузнецов доказал следующую формулу:

$$\Psi_\Gamma(X) = 2\sum_{n\le Y}\sqrt{n^2-4}\mathcal{L}_{n^2-4}(1), \quad Y = X^{1/2}+X^{-1/2},$$

где

$$\mathcal{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\rho_q(n)}{q^s},$$

$$\rho_q(n) := \#\{x \pmod{2q} : x^2 \equiv n \pmod{4q}\}.$$

Для $n \neq 0$ справедлива оценка

$$\mathcal{L}_n(1/2+it) \ll n^\theta(1+|t|)^A,$$

где $A=\theta=1/6+\epsilon$ согласно результатам Conrey-Iwaniec 2000, Young 2017.

Гипотеза 1

В 1984 Iwaniec выдвинул следующую гипотезу:
для любого $\epsilon > 0$ и $C, D, n \geq 1$

$$\sum_{c \leq C} \frac{e(D/c)}{c} S(n, n, c) \ll (nCD)^{\epsilon}.$$

Если данное утверждение верно, то

$$\Psi_{\Gamma}(X) = X + O(X^{1/2+\epsilon}).$$

Гипотеза 2

- 2014 Petridis-Risager выдвинули гипотезу, согласно которой

$$S(T,X)=\sum_{|t_j|\le T} X^{it_j} \ll T(TX)^{\epsilon}.$$

Laaksonen доказал эту гипотезу для фиксированного X при $T\to\infty$.

Гипотеза 2

- 2014 Petridis-Risager выдвинули гипотезу, согласно которой

$$S(T,X) = \sum_{|t_j|\le T} X^{it_j} \ll T(TX)^{\epsilon}.$$

  Laaksonen доказал эту гипотезу для фиксированного X при $T \to \infty$.

- 2019 Балканова-Фроленков:

$$S(T,X) \ll \max\left(X^{1/4+\theta/2}T^{1/2}, X^{\theta/2}T\right)\log^3 T,$$

$$S(T,X) \ll T\log^2 T \quad \text{if} \quad T > \frac{X^{1/2+7\theta/6}}{\kappa(X)},$$

  где $\theta = 1/6$ и $\kappa(X)$ обозначает расстояние от $X^{1/2}+X^{-1/2}$ до ближайшего целого числа.

Средние значения L-функций

Балканова-Фроленков-Risager (2019+): предположим, что асимптотическая формула

$$\sum_{2<n\leq X} \mathcal{L}_{n^2-4}(1/2+it) = \int_2^X m_t(u)du + O(X^{\alpha+\epsilon})$$

выполнена для некоторого $\alpha > 0$. Тогда

$$\Psi_\Gamma(X) = X + O(X^{1/2+\alpha/4+\epsilon}).$$

При этом $\alpha = 2(1+\theta)/3$ позволяет получить результат Soundararajan-Young.

Теорема о простых геодезических 2

Пусть $\mathbb{H}^3 = \{(x, y); \quad x \in \mathbb{C}; \quad y > 0\}$ и $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ группа Пикара над Гауссовыми числами $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Теорема о простых геодезических для $\Gamma \setminus \mathbb{H}^3$

$$\pi_\Gamma(X) = \mathrm{Li}(X^2) + E_\Gamma(X).$$

Теорема о простых геодезических 2

Пусть $\mathbb{H}^3 = \{(x, y); \quad x \in \mathbb{C}; \quad y > 0\}$ и $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ группа Пикара над Гауссовыми числами $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Теорема о простых геодезических для $\Gamma \setminus \mathbb{H}^3$

$$\pi_\Gamma(X) = \mathrm{Li}(X^2) + E_\Gamma(X).$$

Sarnak (1983): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+1/6+\epsilon}$.

Теорема о простых геодезических 2

Пусть $\mathbb{H}^3 = \{(x, y); \quad x \in \mathbb{C}; \quad y > 0\}$ и $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ группа Пикара над Гауссовыми числами $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Теорема о простых геодезических для $\Gamma \setminus \mathbb{H}^3$

$$\pi_\Gamma(X) = \mathrm{Li}(X^2) + E_\Gamma(X).$$

Sarnak (1983): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+1/6+\epsilon}$.

Обозначим $\{\kappa_j = 1 + t_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots\}$ дискретный спектр гиперболического Лапласиана на $L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}^3)$ и $\{u_j\}$ соответствующий ортонормированный базис собственных функций.

Известные результаты

В 2001 Nakasuji доказала, что для $1 \le T \le X^{1/2}$

$$\Psi_\Gamma(X) = \frac{X^2}{2} + \sum_{|t_j| \le T} \frac{X^{1+it_j}}{1+it_j} + O\left(\frac{X^2}{T}\log X\right).$$

- Koyama (2001): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+1/14+\epsilon}$ с гипотезой.
- Балканова-Chatzakos-Cherubini-Фроленков-Laaksonen (2018): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+1/8+\epsilon}$.
- Балканова-Фроленков (2018): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+\epsilon}$ с гипотезой.
- Balog-Biro-Cherubini-Laaksonen (2019): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+2/21+\epsilon}$, $(1.595\ldots)$.
- Balog-Biro-Cherubini-Laaksonen (2019): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2-1/46+\epsilon}$ с гипотезой.
- Балканова-Фроленков (2020): $E_\Gamma(X) \ll X^{3/2+41/474+\epsilon}$ $(1.568\ldots)$.

Основной результат

Нам удалось показать, что для $s = 1/2 + ir$, $r \ll T^{\epsilon}$

$$\sum_{T<t_j<2T} \alpha_j |L(\mathsf{sym}^2 u_j, s)|^2 \ll T^{3+4\theta+\epsilon}.$$

Наилучший известный результат (Nelson 2019): $\theta = 1/6$.

Гипотеза Линделёфа для L-функций Дирихле: $\theta = 0$.

Гипотеза Линделёфа в среднем для L-функций симметрического квадрата:

$$\sum_{T<t_j<2T} \alpha_j |L(\mathsf{sym}^2 u_j, s)|^2 \ll T^{3+\epsilon}.$$