Как найти сумму степеней?

Г. Мерзон*

декабрь '17

Как вычислить сумму чисел от 1 до n, хорошо известно: если сложить первое число с последним, второе с предпоследним и т. д., получается формула $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Но уже формулы для суммы первых нескольких квадратов, кубов или четвертых степеней менее известны, причем обычно с ними знакомят, сразу предлагая *доказать* неизвестно откуда взявшийся ответ[1].

Попробуем, наоборот, сначала понять, как найти утверждения, которые можно было бы доказывать (а уже потом кое-что, быть может, докажем)[2].

1. Начнем с сумм квадратов. Выпишем первые несколько из них: $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$... В последовательности 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140... никакой закономерности, кажется, не видно (кроме того, конечно, что соседние числа отличаются на очередной квадрат). Хотелось бы както опереться на уже понятный случай — вычисление суммы $1 + \ldots + n$. Запишем эти две последовательности сумм вместе.

*merzon@mccme.ru

[1]Известны, конечно, и разные варианты *геометрического суммирования.* К сожалению, если для суммирования квадратов еще получается непосредственно обобщить вычисление суммы от 1 до n, то уже для суммы кубов вместо непонятно как полученного ответа сообщается, фактически, непонятно откуда взявшееся готовое решение (изящное, но еще более загадочное).

[2]Разумеется, это не является самым быстрым способом «попасть из пункта А в пункт Б». Читатель, желающий побыстрее узнать формулу для суммы $1^k + \ldots + n^k$ вместе с ее доказательством, может почитать, например, статью [1].

n	1	2	3	4	5	6	7
$1+\ldots+n$	1	3	6	10	15	21	28
$1^2+\ldots+n^2$	1	5	14	30	55	91	140

Уже можно уловить наличие некоторой связи между двумя строками: для $n = 4$ нижнее число втрое больше верхнего… дальше, правда, такой делимости не видно (по крайней мере, до $n = 7$), но некоторые общие делители у чисел в одном столбце видны: 5 для $n = 5$, 7 для $n = 6$ и $n = 7$… Раз у чисел в одном столбце бывает большой общий множитель, запишем под каждым столбцом отношение чисел.

n	1	2	3	4	5	6	7
$1+\ldots+n$	1	3	6	10	15	21	28
$1^2+\ldots+n^2$	1	5	14	30	55	91	140
S_2/S_1	1	5/3	7/3	3	11/3	13/3	5

Теперь закономерность видна: с увеличением n на 1 частное увеличивается на $2/3$, т. е. это частное равно $(2n+1)/3$. Вместе с формулой для $1+2+\ldots+n$ это дает следующий ответ.

Гипотеза 1. $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Отметим, что вычислительного эксперимента хватило небольшого и несложного. А вот осмысленное *представление информации* было очень существено: если просто взять тетрадку и в случайных местах выписать разные суммы последовательных чисел и разные суммы квадратов, то заметить какую-либо закономерность малореально.

Попробуем продвинуться чуть дальше. Для этого вычислим несколько первых сумм кубов и несколько первых сумм четвертых степеней.

(Читателю в этом месте предлагается **остановиться** и, не заглядывая дальше, попробовать самому выписать таблицу из нескольких значений этих сумм и попытаться что-нибудь понять!)

n	1	2	3	4	5
$1 + \ldots + n$	1	3	6	10	15
$1^2 + \ldots + n^2$	1	5	14	30	55
$1^3 + \ldots + n^3$	1	9	36	100	225
$1^4 + \ldots + n^4$	1	17	98	354	979

Видно, что с кубами дело обстоит даже проще, чем с квадратами. Читатель, никогда раньше не видевший формулы для суммы $S_3(n) := 1^3 + \ldots + n^3$, несомненно сможет ее, глядя на эту таблицу, угадать.

У $S_4(n)$ и $S_1(n)$ общих делителей (кроме 2) уже не видно. Но все же посмотрим: 98 явно делится на 7, как и соответствующая сумма квадратов, 14; у 30 и 354 есть общий делитель 6; 979 и 55 делятся на 11… — видимо на этот раз полезно посмотреть на отношение S_4/S_2.

n	1	2	3	4	5	6
S_2	1	5	14	30	55	91
S_4	1	17	98	354	979	2275
S_4/S_2	1	17/5	7	59/5	89/5	25

Видно, что после домножения этого отношения на 5 получится последовательность целых чисел: 5, 17, 35, 59, 89, 125… Тут уже нельзя сказать, что разность соседних чисел неизменна… Все же посмотрим на эти разности: 12, 18, 24, 30… — закономерность сразу видна!

Упражнение 1. Предложите формулу[3] для суммы $1^4 + \ldots + n^4$.

Отметим, что в отличие от формул для $S_1(n)$, $S_2(n)$ и $S_3(n)$ эта формула *не раскладывается на линейные множители.* Вероятно, с этим связано и то, что ее невозможно (насколько известно автору) найти методами геометрического суммирования.

[3]Здесь и дальше «предложите формулу» означает, что достаточно найти правдоподобную (согласующуюся с имеющимися наблюдениями) гипотезу, доказательство не требуется.

2. Двигаться практически вслепую, просто смотря на числа, получающиеся как значения наших сумм, становится тяжело. «Только теория решает, что именно можно наблюдать» — чтобы двигаться дальше, нужно понять, какого рода ответы мы надеемся получить.

Самое общее, что можно сказать, глядя на формулы для $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, $S_4(n)$, — что все это некоторые *многочлены*[4] от n. Раскроем в уже известных нам формулах все скобки и запишем их как многочлены.

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n
\end{aligned}$$

Теперь кое-что видно сразу.

Гипотеза 2. $S_k(n)$ — многочлен от n вида[5] $\frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \ldots$

Для гипотез про следующие коэффициенты маловато данных. (Разве что свободный член все время равен 0 — и это, пожалуй, понятно: значением S_k в нуле естественно считать нулевым как «сумму нулевого числа слагаемых».)

Но теперь понятно, как искать следующие формулы: если мы ожидаем, например, что

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn,$$

то неизвестные коэффициенты можно найти по значениям $S_5(n)$ для небольших n.

Дальше любую конкретную формулу можно попробовать доказать по индукции. Но хотелось бы все-таки понять, почему такой рецепт нахождения формул приводит к правильным ответам.

[4] Отметим, что такая точка зрения совсем не самоочевидна — скажем, можно было надеяться (по крайней мере, до формулы для S_4) на ответ в виде произведения линейных функций…

[5] Многоточие заменяет члены меньших степеней.

Теорема 1. Пусть S_k — такой многочлен степени $k+1$, что $S_k(n) = 1^k + \ldots + n^k$ для $n = 0, 1, \ldots, k+1$. Тогда это равенство верно для всех натуральных n.

Доказательство. Как получается последовательность сумм степеней? Начинается она, можно считать, с нуля (для $n = 0$), а дальше каждый раз увеличивается на n^k. Значит, нам нужно доказать, что при увеличении аргумента многочлена S_k на единицу, от $n-1$ до n, значение этой функции тоже увеличивается на n^k,

$$S_k(n) - S_k(n-1) = n^k.$$

Но для $n = 1, \ldots, k+1$ это равенство верно по условию. А в обеих частях равенства стоят *многочлены степени не выше* k (почему это верно про левую часть, кстати?) Значит, эти многочлены равны (их разность равна нулю, так как имеет степень не выше k, но больше k корней), что и требовалось доказать[6]. □

В частности, теперь доказаны формулы, найденные нами экспериментально.

3. Теперь для любого конкретного k мы можем, в принципе, найти формулу для суммы $1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Можно было бы на этом остановиться, но хотелось бы понять, как связаны ответы для разных k (а в идеале — найти в том или ином смысле общую формулу, работающую для произвольного k).

Для этого полезно найти несколько следующих формул. Решать возникающие системы уравнений вручную быстро становится утомительным, имеет смысл воспользоваться компьютером (уже и для $k = 5$). В конце статьи приведена короткая программа, составляющая и решающая соответствующую систему уравнений.

Одна вещь после взгляда на результаты компьютерного эксперимента видна хорошо.

[6]Я благодарен Ф. В. Петрову, рассказавшему мне такое доказательство.

$$\begin{aligned}
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \ \ + 0 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 \ \ + 0 - \frac{1}{30}n \\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 - \frac{1}{12}n^2 + 0 \\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 \ \ + 0 - \frac{1}{6}n^3 \ \ + 0 + \frac{1}{42}n \\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 + 0 - \frac{7}{24}n^4 + 0 + \frac{1}{12}n^2 + 0 \\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 \ \ + 0 - \frac{7}{15}n^5 + 0 + \frac{2}{9}n^3 \ \ + 0 - \frac{1}{30}n.
\end{aligned}$$

Гипотеза 3. После $\frac{1}{2}$ каждый второй коэффициент (при $n^{k-2}, n^{k-4}, \ldots$) многочлена $S_k(n)$ равен 0.

Как эту гипотезу доказать? Знаем ли мы хоть какое-нибудь похожее утверждение? *Все* коэффициенты при четных / нечетных степенях многочлена равны нулю тогда и только тогда, когда этот многочлен является нечетной / четной функцией. Это подсказывает, что стоит изучить следующий вопрос.

Упражнение 2. Чему равно значение многочлена S_k в точке $-n$? Как оно связано со значениями S_k в целых положительных точках? (Если ответить не получается, перечитайте доказательство теоремы.)

Отметим, что для аргумента, не являющегося целым положительным числом, $S_k(x)$ уже не является какой-либо суммой (что могли бы значить слова «сумма k-х степеней последовательных чисел от 1 до $\sqrt{2}$», например?) — но значение *многочлена* S_k в точке x определено в любом случае. То есть это пример вопроса, который невозможно было даже задать, пока мы думали в терминах таблиц значений сумм.

Упражнение 3. а) Выведите из результата предыдущего упражнения гипотезу 3.

б) Докажите также, что для нечетного k функция $S_k(n)$ является многочленом от $u := n(n+1)/2$ (ср. с тем, что четный многочлен является многочленом от $u := x^2$) — например, $S_3(n) = u^2$.

Остальные коэффициенты на первый взгляд кажутся довольно загадочными, но попытаемся разобраться. Начать естественно с коэффициентов при n^{k-1}: 1/6, 1/4, 1/3, 5/12, 1/2, 7/12, 2/3… — если закономерности не видно, то приведем их к общему знаменателю: 2/12, 3/12, 4/12, 5/12…

Гипотеза 4. $S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} + 0 \cdot n^{k-2} + \ldots$

Уже начинают проглядывать контуры какой-то общей (работающей для произвольного k) формулы, не правда ли?..

Упражнение 4. Уточните последнюю гипотезу: предложите формулу для коэффициента при n^{k-3} (если не выходит, посмотрите внимательно на треугольник Паскаля).

Дальше могут возникнуть некоторые гипотезы и про зависимость от k следующих коэффициентов. Попробуйте превратить их в удобный (не требующий решения систем уравнений) рецепт получения формулы для $S_{k+1}(n)$ из формулы для $S_k(n)$.

* * *

Мы только начали разговор про суммы степеней: за кадром остались все связи с геометрией, комбинаторикой, анализом; совсем не упоминался ключевой для этой задачи (но чудесным образом появляющийся в самых разных областях математики) объект — *числа Бернулли*… Несколько больше объясняется в заметке [2] (в частности, там можно найти ответы на вопросы из предыдущего абзаца вместе с доказательствами).

* * *

Я хотел бы поблагодарить А. И. Сгибнева и Г. Б. Шабата за полезные обсуждения, а также Н. Ю. Медведя за советы по Python.

Список литературы

[1] *Абрамович В. С.* Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Квант, 1973, № 5, 22–25.
http://kvant.mccme.ru/1973/05/summy_odinakovyh_stepenej_natu.htm

[2] *Мерзон Г. А.* Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел // Матем. просв., сер. 3, вып. 21 (2017), 104–118.
https://www.mccme.ru/~merzon/pscache/bernoulli-mp.pdf

Приложение. Приведем программу на Python, вычисляющую коэффициенты многочленов $S_k(n)$.

```
from sympy import Matrix, solve_linear_system

def S(k,n):
    return sum([i**k for i in range(1,n+1)])

def S_poly(k):
    values = Matrix([S(k,n) for n in range(1,k+2)])
    equations = Matrix([[n**(k+1-i) for i in \
        range(k+1)] for n in range(1,k+2)])
    return equations.LUsolve(values)

print(S_poly(6))
```