Проект примечания к концу первого абзаца на странице 29 (я пока в тексте ничего не менял):[1]

Lehmann 1964 A Solution of the Shannon Switching Game

Joszef Beck, Combinatorial Games, Tic-Tac-Toe theory, p.68

---

[1]Существование выигрышной стратегии для первого игрока в игре Гейла можно вывести из следующего более общего результата (Lehmann, 1964, см. изложение в книге Joszef Beck, *Combinatorial Games, Tic-Tac-Toe theory*, Cambridge University Press, 2008, с. 68).

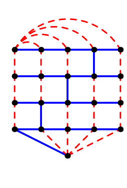
Рассмотрим игру на графе. Вершины графа считаем точками, а рёбра — соединяющими их карандашными линиями. Игроки ходят по очереди. Первый стирает карандашные рёбра (не более одного за ход), а второй обводит их чернилами (тоже по одному). Обведённые рёбра стереть нельзя, а стёртые нельзя обвести. Первый игрок выигрывает, если граф перестаёт быть связным (разбивается на части, не соединённые рёбрами друг с другом). Соответственно второй выигрывает, если чернильных рёбер достаточно, чтобы из любой вершины попасть в любую.

Оказывается, для этой игры есть простой критерий выигрыша. Именно, *второй (обводящий) игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда в графе есть два непересекающихся остова*, то есть когда можно покрасить рёбра графа в два цвета и рёбра каждого цвета будут достаточны, чтобы из любой вершины попасть в любую.

Удивительным образом доказательство этого критерия совсем не сложно. Пусть у обводящего игрока есть выигрышная стратегия. Её можно применить и в ситуации, когда он начинает. Дадим теперь двум игрокам, обводящим рёбра чернилами разных цветов, сыграть друг с другом. (Обведённые одним игроком рёбра стёрты для другого.) Каждый из них выиграет, то есть сформирует из своих рёбер остов, значит, в графе есть два непересекающихся остова.

В обратную сторону. Пусть в графе есть два неперекающихся остова (назовём их красным и синим). Если стирающий игрок стирает ребро, скажем, в красном остове, то этот остов может распасться максимум на две части. Синих рёбер достаточно, чтобы из одной части пройти в другую. Значит, есть синее ребро, концы которого принадлежат двум разным частям. Второй игрок обводит это ребро. Дальнейшая игра по существу происходит на графе, в котором концы обведённого ребра склеены в одну вершину, и в этом графе синие и красные рёбра по-прежнему образуют два остова, так что можно вновь применить то же рассуждение (пока не останется граф с одной вершиной, где связность очевидна).

Чтобы применить этот критерий к игре Гейла, заметим, что в ней требовалось соединить одну сторону с другой, а в критерии речь идёт о соединении одной вершины с другой. Поэтому склеим короткие стороны прямоугольника (из каждой стороны получится вершина). Дальше договоримся, что первым ходом игрок обводит отрезок на границе прямоугольника, примыкающий к короткой стороне. Это соответствует склеиванию двух вершин. Остаётся применить критерий к полученному графу и убедиться, что обводящий игрок может не только соединить две вершины, но и обеспечить путь между любыми двумя вершинами (это даже больше, чем надо). Для этого надо указать два остова, что несложно: один состоит из всех линий, параллельных коротким сторонам, второй использует перпендикулярные линии (кроме одной в каждом слое, это обеспечивает связность первого остова).



Заметим в заключение, что существуют достаточно эффективные («полиномиальные») алгоритмы, проверяющие указанное условие (существование двух непересекающихся остовов) для заданного графа (Edmonds, 1965, ссылка приведена в упомянутой книге Бека).