

Зимний зачет, 8 класс

КОМБИНАТОРИКА.

1. Отображения. Биекция. Биекции между конечными множествами. Обратное отображение. Биективность обратного отображения.
2. Числа сочетаний. Определение, явная формула.
3. Бином Ньютона.
4. Треугольник Паскаля. Три определения, их эквивалентность.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ.

5. Аксиома индукции и принцип наименьшего числа. Вывод из принципа наименьшего числа аксиомы индукции.
6. Аксиома индукции и принцип наименьшего числа. Вывод из аксиомы индукции принципа наименьшего числа.

ГРАФЫ.

7. Что означает задать граф? Петли, кратные ребра. Инцидентность, степень вершины. Связь количества ребер в графе и степеней его вершин. Лемма о рукопожатиях (как следствие предыдущего утверждения).
8. Лемма о рукопожатиях (доказательство по индукции).
9. Маршрут, путь, простой путь, цикл, простой цикл. Существование простого пути между вершинами, соединенными маршрутом. Существование простого цикла, проходящего через вершину, лежащую в некотором цикле. Существование простого цикла в графе, где есть хотя бы один цикл.
10. Связный граф, компонента связности графа. Любой граф есть объединение (непересекающихся) компонент связности.
11. Дерево, лес. Висячие и изолированные вершины. Существование висячей вершины в дереве. Количество ребер в дереве на n вершинах.
12. Остовное дерево. Существование остовного дерева в связном графе. Минимальное количество ребер в связном графе на n вершинах.
13. Эйлеров путь/цикл. Критерий существования эйлерового пути/цикла в графе без изолированных вершин.
14. Планарный граф. Формула Эйлера.
15. Неравенства в планарном графе. Непланарность $K_{3,3}$ и K_5 .

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ.

16. Делимость. Определение и основные свойства.
17. Деление с остатком, остаток и неполное частное, их единственность.
18. Критерий того, что числа дают одинаковые остатки при делении на m . Сравнения. Определение и основные свойства.
19. Признаки делимости и равноостаточности при делении на 2^k , 5^k , 3, 9, 11.
20. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД.
21. Простейшие следствия из существования линейного представления НОД.
22. Простые числа. Лемма Евклида. Основная теорема арифметики.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ.

1. Докажите, что $\sqrt{2}$ — иррационально.
2. Докажите формулу включений–исключений для двух и трех множеств:
 - a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
 - b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.
3. Найдите количество чисел, не превосходящих 120, и делящихся на 2, на 3 или на 5.
4. Докажите, что среди чисел, меньших 1000, поровну чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 12.
5. Докажите, что количество k -элементных подмножеств n -элементного множества совпадает с количеством последовательностей длины n из 0 и 1, в которых ровно k единиц.
6. Докажите, что количество подмножеств n -элементного множества равно 2^n .
7. Докажите, что а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; в) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$;
- d) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$; е) $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$;
- f) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$;
8. Докажите, что для любого натурального n выполнены равенства:
 - a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
 - b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$;
 - c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
9. Сколько существует способов разбить прямоугольник $2 \times n$ на доминошки?
10. Найдите коэффициент при $a^k b^l c^{n-k-l}$ после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a + b + c)^n$.
11. Докажите, что из любого связного графа можно удалить вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы граф остался связным.
12. Докажите, что любой связный граф, степени вершин которого не превосходят 2, есть либо простой цикл, либо простой путь.
13. Докажите, что если в связном графе $2k$ вершин нечетной степени, то его ребра можно разбить на k непересекающихся (по ребрам) путей.
14. Докажите, что произведение k подряд идущих натуральных чисел делится на $k!$.
15. Докажите, что у натурального числа нечетное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно — полный квадрат.
16. Докажите, что если в графе на n вершинах ребер не меньше чем n , то в нём есть цикл.
17. Чему может быть равно $(2n + 3, 7n + 6)$?
18. а) Докажите, что в планарном графе есть вершина степени не более 5.
б) Докажите, что планарный граф можно покрасить в 6 цветов правильным образом.
19. В связном графе степени всех вершин не превосходят 10, а у одной строго меньше 10. Докажите, что его можно покрасить в 10 цветов правильным образом. Можно ли отказаться от условия, что граф связан?
20. Разложите на множители выражение $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.