

Кармайкл и Герон

1. Для каких простых p выполнено $29^p + 1 : p$?
2. Найдите вероятность того, что, извлекая наудачу 5 флажков из ящика, в котором 8 красных и 7 желтых флажков, мы вытащим ровно 3 красных и 2 синих флажка.

-
3. (**Число Кармайкла**) Докажите, что для любого целого a выполнено $a^{561} - a : 561$.
 4. Докажите, что из ста чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

5. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC , O — точка пересечения AC и BD . Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{S_{BOC} \cdot S_{DOA}}$.

6. Пусть каждое из натуральных чисел n , $n + 1$, $n + 2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

7. (**Формула Герона**) Докажите, что площадь треугольника со сторонами a , b и c равна

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

где p — полупериметр.