

Уральская

1. 2013 год — первый со времён Средневековья, в записи которого использованы четыре последовательные цифры. Сколько таких лет (до 10000 г.) ещё будет?

2. Имеется 2014 подряд идущих натуральных чисел. Известно, что наибольшее из них делится на наименьшее. Каким может быть наибольшее из этих чисел? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

3. Решите в целых числах уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$.

4. На боковых сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Точка F пересечения биссектрис углов DEB и ADE лежит на основании AB . Докажите, что F — середина AB .

5. а) В связном графе степени всех вершин не превосходят 10, а у одной строго меньше 10. Докажите, что его можно покрасить в 10 цветов правильным образом. Можно ли отказаться от условия, что граф связан?

б) Докажите, что планарный граф можно покрасить в 6 цветов правильным образом.

6. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая ℓ , параллельная стороне AC . Биссектриса угла A пересекает ℓ в точке M , а биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает ℓ в точке N . Найдите MN , если известно, что $AB = 20$ и $BC = 13$.

7. При каких $n > 3$ число $n!$ делится на число $(n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$?

8. Диего хочет покрыть квадрат 6×6 восемнадцатью фигурками домино. а) Может ли он так разместить в квадрате 3 фигурки домино (без наложений), чтобы оставшуюся часть таблицы можно было покрыть оставшимися фигурками единственным способом? б*) А две?

9. Некоторые города Графландии соединены двусторонними авиарейсами компании “Графские авиалинии” так, что из любого города можно долететь до любого другого, возможно, с пересадками. Авиакомпания открыла новый рейс между двумя городами, и оказалось, что из любого города теперь можно долететь до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Какое наибольшее количество рейсов могло быть необходимо, чтобы добраться из одного города в другой до этого?

10. В левом нижнем углу таблицы 7×7 стоит число 1, а в правом верхнем — число 9. Можно ли заполнить остальные клетки натуральными числами так, чтобы у каждого числа соседи справа и сверху (если есть) были не меньше этого числа, и во всех квадратах 2×2 суммы чисел были различны?