

Кролики Фибоначчи

1. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

2. Последовательность Фибоначчи задается следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и для любого натурального n выполнено $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Докажите, что для любого натурального n выполнено $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

3. Докажите, что в дереве, в котором хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячие вершины.

4. Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

5. На сторонах параллелограмма вне него построены равносторонние треугольники. Докажите, что вершины этих треугольников, не совпадающие с вершинами данного параллелограмма, являются вершинами еще одного параллелограмма.

6. Максим Амирьянович нарисовал на доске квадрат 7×7 . Восьмиклассники кидали в доску шишки, и когда они ушли на обед, в клетках начерченного квадрата оказалось 15 вмятин от шишек, расположенных симметрично относительно большей диагонали. Докажите, что есть вмятина или вмятины на большей диагонали.

7. Докажите, что если $a + b + c + d = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abd + acd + bcd)$.

8. На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым - второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

9. В Математической стране n городов. Любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться до любого другого, сделав не более одной пересадки.

10. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $2 \times n$ на доминошки (так мы называем прямоугольники 1×2) равно F_{n+1} .

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА:

Леонардо Пизанский (около 1170 года, Пиза — около 1250 года, там же) — первый крупный математик средневековой Европы. Наиболее известен под прозвищем Фибоначчи.

Труд Леонардо Фибоначчи “Книга абака” способствовал распространению в Европе позиционной системы счисления, более удобной для вычислений, чем римская нотация.