# Решения 1

**Задача 15.** Дано нечетное натуральное $n$. Известно, что при любых натуральных $a$ и $b$, для которых $a^2b+1$ делится на $n$, число $a^2+b$ также делится на $n$. Найдите все возможные значения $n$.

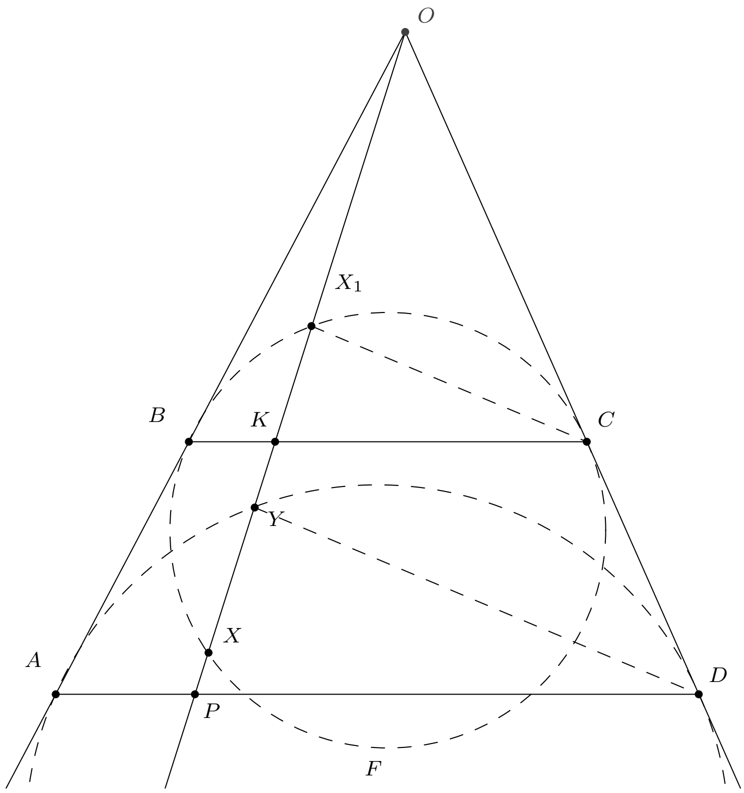
**Ответ** $n = 1, 3, 5, 15$

**Решение** Для любого $a$ взаимно простого с $n$ числа $a^2, 2a^2, \ldots, na^2$ дают все возможные остатки при делении на $n$. Поэтому найдется $b$ такое, что $a^2b+1$ делится на $n$. Из системы $\begin{cases} a^2b+1 \equiv 0 \\ a^2+b \equiv 0 \end{cases}$ следует, что $\begin{cases} a^2b+1 \equiv 0 \\ a^4+a^2b \equiv 0 \end{cases}$, откуда $a^4-1 \equiv 0$. Из Малой теоремы Ферма следует, что для любого $a$ взаимно простого с 3, $a^4-1 \vdots 3$. Аналогично подходит $n=5$, а уже остюда следует, что подходит $n = 15 = 3 \cdot 5$

Для доказательства того, что другие $n$ не удовлетворяют условию возьмем $a = 2$. Тогда получаем, что $15 = 2^4 - 1 \vdots n$. Значит $n = 1, 3, 5, 15$ $\square$

**Задача 25.** Дана трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$. На основаниях $AD$ и $BC$ выбраны точки $P$ и $K$ соответственно так, что $\frac{AP}{PD} = \frac{BK}{KC}$. На отрезке $PK$ выбраны точки $X$ и $Y$ так, что $\angle AYD = \angle BCD$ и $\angle BXC = \angle ADC$. Докажите, что точки $C, D, X, Y$ лежат на одной окружности.

**План решения**




1. Сначала надо доказать, что условие $\frac{AP}{PD} = \frac{BK}{KC}$ равносильно тому, что прямые $AB$, $PK$ и $CD$ пересекаются в одной точке. Назовем ее $O$.

2. Из теоремы о вписанном угле и угле между хордой и касательной следует, что условие $\angle BXC = \angle ADC = \angle BCO$ и означает, что окружность $\omega_1$ описанная около $BXC$ касается $OD$ в точке $C$. Аналогично окружность $\omega_2$ описанная около $AYD$ касается $OD$ в точке $D$.

3. Пусть $X_1$ — вторая точка пересечения $OX$ и $\omega_1$. Тогда по теореме о степени точки: $OX \cdot OX_1 = OC^2$

4. Рассмотрим гомотетию с центром в точке $O$ и коэффициентом $\frac{OD}{OC}$. Точка $C$ переходит в точку $D$, прямая $OD$ остается на месте. Значит окружность $\omega_1$ переходит в окружность касающуюся $OD$ в точке $D$ т.е. в $\omega_2$. Точка $X_1$ перейдем в пересечения окружности $\omega_2$ и $OX$, т.е. в $Y$. Значит $\dfrac{OY}{OX_1} = \dfrac{OD}{OC}$

5. Из результатов двух предыдущих пунктов следует, что $OX \cdot OY = OC \cdot OD$. Значит по теореме о степени точки $X, Y, C, d$ лежат на одной окружности.