Непрерывность

Задача 1 (Теорема о корне). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет на его концах разные знаки. Докажите, что существует $c \in [a,b]$ такое, что $f(c) = 0$.

Задача 2 (Теорема о промежуточном значении). Докажите, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f принимает на этом отрезке все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Задача 3. Функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Докажите, что существует $c \in [a,b]$ такое, что $f(c) = g(c)$.

Задача 4. Пусть f — непрерывная функция, $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Докажите, что существует $c \in [a,b]$ такое, что $f(c) = c$.

Алгебра

Задача 5. Докажите, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c, для которого $a+b+c > 0$, а $a-b+c < 0$, имеет два действительных корня.

Задача 6. При каких значениях параметра a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - (2a+1)x + 4 - a = 0$?

Задача 7. Докажите, что многочлен нечетной степени имеет вещественный корень.

Задача 8. а) Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 4x + 2$? Укажите интервалы длины 1 содержащие корни. б) Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 4x^3 + 3x - 1$?

Задача 9. Сколько корней может иметь уравнение третьей степени если считать корни а) без учета кратности; б) с учетном кратности? Приведите соответствующие примеры. Аналогичный вопрос про уравнение 5 степени.

Задача 10. а) Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?
б) Докажите, что в пространстве найдется кривая, которая пересекается с любой плоскостью. Кривую можно искать в виде $y = f(x), z = g(x)$.

Анализ

Задача 11. Докажите, что любая функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$ является ограниченной на этом отрезке
а) при помощи аксиомы Больцано-Вейерштрасса об предельной точки ограниченной последовательноси;
б) при помощи аксиомы Кантора о вложенных отрезках.

Задача 12. Докажите, что любая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ достигает на этом отрезке своей нижней и верхней точной грани при помощи аксиомы Больцано-Вейерштрасса об предельной точки ограниченной последовательноси.

Задача 13. а) Верно ли утверждение задачи 11 для функции непрерывной на интервале (a, b)?
б) Верно ли утверждение задачи 11 для произвольной (необязательное непрерывной) функции определенной на отрезке $[a, b]$?
в) Верно, ли что функция ограниченная на интервале (a, b) достигает на нем своей ижней и верхней точной грани?

Задача 14. Пусть функция f непрерывная на отрезке $[a, b]$. Докажите, что $f([a, b])$ — тоже отрезок.

Задача 15. Существует ли непрерывная функция на прямой, принимающая каждое свое значение а) ровно 2 раза; б) ровно 3 раза?

Геометрия

Задача 16. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спускался с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороге он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.

Соглашение. Под фигурой мы будем понимать связное ограниченное множество имеющее площадь. Для простоты можно думать, что фигура это многоугольник.

Задача 17. Докажите, что для любой фигуры существует прямая заданного направления, делящая площадь пополам. Единственна ли такая прямая?

Определение 1. Фигура Φ называется *выпуклой*, если для любых точек $A, B \in \Phi$ отрезок $AB \subset \Phi$.

Задача 18. Докажите, что пересечение выпуклых фигур выпукло.

Задача 19. а) Дана выпуклая фигура и точка вне ее. Докажите, что существует прямая, проходящая через точку и делящая площадь фигуры пополам. Единственна ли такая прямая?

Вкусный блин можно разрезать на две части равной площади.

б) Решите ту же задачу для случая невыпуклых фигур.

Задача 20. Та же задача, но точка лежит *внутри* выпуклой фигуры.

Задача 21. (Теорема Борсука-Улама для окружности). Пусть имеется непрерывная на окружности функция. Тогда найдется пара диаметрально противоположных точек, в которых функция принимает одинаковые значения.

Докажите, что сейчас на экваторе есть две противоположные точки с одинаковой температурой.

Задача 22. Для любой выпуклой фигуры существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.

Задача 23. Для любой выпуклой фигуры существуют две перпендикулярные прямые, делящие ее на четыре части одинаковой площади.

Задача 24. Если имеются два выпуклые фигуры, то существует прямая, делящая каждую из них на части равной площади.

Любые два вкусных блина можно разрезать на равные части одним разрезом.