

Многочлены 1. Коэффициенты и значения

Определение 1. *Многочленом степени n* называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, где a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 — действительные числа, называемые *коэффициентами многочлена*, $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом*.

Число 0 называется *нулевым многочленом*. Его степень неопределена (также иногда ее полагают равной -1 или $-\infty$).

Задача 1. Пусть $\deg P = n$, $\deg Q = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P + Q$? А многочлена $P \cdot Q$?

Задача 2. Дан многочлен $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при а) x^{17} ; б) x^{18} .

Задача 3. Пусть P — ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot (x - 1)$ быть неотрицательными?

Задача 4. Коэффициентами многочленов нечетной степени P и Q являются нечетные числа. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один четный коэффициент.

Определение 2. Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ задает функцию $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в точке x_0 равно $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0$.

Число x_0 называется *корнем* многочлена P , если $P(x_0) = 0$.

Задача 5. а) Выразите числа $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ через коэффициенты многочлена P .

б) Найдите сумму коэффициентов многочленов $(x + 2)^n$, $(x^2 - x + 1)^n$.

в) Найдите сумму коэффициентов при четных степенях этих многочленов.

Задача 6. Решите задачи 3 и 4 другим способом.

Задача 7. а) Пусть $P(x) = (1 + x\sqrt{2})^{100}$. Докажите, что число $P(1) + P(-1)$ — целое. б) Вычислите $C_{100}^0 + 3^2 C_{100}^2 + \dots + 3^{100} C_{100}^{100}$.

Определение 3. Многочлен A *делится* на ненулевой многочлен B , если существует многочлен Q , называемый *частным* такой, что $A = B \cdot Q$.

Определение 4. Разделить многочлен A на ненулевой многочлен B с остатком — это найти многочлены Q , R такие, что выполнено равенство $A = B \cdot Q + R$, причем $\deg R < \deg B$ или $R = 0$. Многочлен Q называется *неполным частным*, многочлен R называется *остатком*.

Задача 8. а) При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $x^2 - 3x + 2$? б) При каких n многочлен $x^n + x + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$?

Задача 9. Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно и многочлены Q и R определяются однозначно.

Задача 10. а) Разделите многочлен x^{100} на $x - 1$ и на $x + 1$ с остатком.

б) Сформулируйте и докажите признаки делимости на многочлен $x - 1$ и на многочлен $x + 1$. Признаки делимости на какие числа это вам напоминает?

Задача 11. а) (**Теорема Безу**) Докажите, что остаток от деления многочлена P на $(x - a)$ равен $P(a)$:

$$P(x) = H(x) \cdot (x - a) + P(a).$$

б) (**Следствие**) Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$

Задача 12. а) Если x_1, x_2, \dots, x_k — различные корни многочлена P , то он делится на многочлен $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_k)$.

б) При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $(x - 1)(x - 2)$?

Задача 13. Докажите, что многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Задача 14. а) Докажите, что если два многочлена степени не выше n совпадают в $n + 1$ точке, то они равны.

б) Докажите, что

$$\frac{(x - a)(x - b)(x - c)}{(d - a)(d - b)(d - c)} + \frac{(x - a)(x - b)(x - d)}{(c - a)(c - b)(c - d)} + \frac{(x - a)(x - c)(x - d)}{(b - a)(b - c)(b - d)} + \frac{(x - b)(x - c)(x - d)}{(a - b)(a - c)(a - d)} = 1.$$