

Предел последовательности-1

Меня ведь не рубли на гонку завели —
 Меня просили: "Миг не проворонь ты!
 Узнай, а есть предел — там, на краю зем-
 ли?
 И можно ли раздвинуть горизонты?"
 В. Высоцкий

1. Докажите по определению, что: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-10}{3n-7} = \frac{2}{3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,9^n = 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$.
2. Докажите формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.
3. Докажите, что действительное число является рациональным тогда и только тогда, когда оно записывается конечной десятичной дробью или бесконечной периодической десятичной дробью.
4. Представьте в виде обыкновенной несократимой дроби: а) $0, (4)$; б) $0,4(63)$.
5. Чему в зависимости от a равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 1}{a^n - 1}$?
6. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$
7. Найдите пределы последовательностей:
 а) $x_n = \frac{2n-2}{7n+3}$; б) $x_n = \frac{1000n}{n^2+1}$; в) $x_n = \frac{(3n-8)(5n+4)}{n(6n-1)}$; г) $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-4}$;
 д) $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-7n+10}$; е) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. * Найдите пределы последовательностей:
 а) $x_n = \frac{2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \dots + (2n)^2 - (2n+1)^2}{3n - 2n^2}$; б) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.
9. Выполните действия: а) $0, (2) - 0, (37)$; б) $1,2(44) + 0, (135)$.

Домашнее задание

10. Выполните действия: $\frac{0,8(5) + 0,17(1)}{0,8(5) - 0,17(1)} + \frac{0,8(3) + 0,1(6)}{0,8(3) - 0,1(6)}$.
11. Докажите, пользуясь только определением предела, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
12. Найдите пределы последовательностей:
 а) $x_n = 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n - 12$; б) $x_n = \frac{5n^2 - 4n + 3}{6n^2 + 10n - 1}$; в) $x_n = \frac{3n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{6n^3}{4n^2 - 1}$;
 г) $x_n = \frac{6n + 1}{\sqrt{n^2 + 3n + 10} + 3n}$;
 д) $x_n = \sqrt{(n+1)(n+3)} - n$; е) $x_n = \frac{2^n + 3^n + 4^n}{4^{n+1} + 3}$.
13. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:
 а) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; в) $x_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$;
 б) $x_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$.
14. Представьте в виде обыкновенной несократимой дроби: $11, (12)$; б) $1,99(2)$
15. Первый член бесконечной геометрической прогрессии a_n равен a , ее знаменатель — q . Найдите сумму:
 а) $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{8}a_4 + \dots$; б) $(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (a_4 + a_5 + a_6)^2 + (a_7 + a_8 + a_9)^2 + \dots$
16. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, если $|x| < 1$ и $a_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \dots (1+x^{2^n})$
17. Сумасшедший турист две первые стоянки сделал где попало, а затем всякий раз ночевал ровно посередине между двумя предыдущими стоянками. Докажите, что через некоторое время он будет топтаться на одном месте и найдите, на каком именно.