Уроки № 59-60 21-22.12.10

Определенный интеграл. Различные задачи

---

1. Применение интеграла для вычисления объёма.

Теорема 1. Пусть некоторое тело в пространстве расположено между плоскостями $x = a$ и $x = b$. Обозначим $\Phi(x)$ сечение этого тела плоскостью, параллельной YOZ и отстоящей от неё на расстоянии x, а $S(x)$ — площадь $\Phi(x)$. Пусть выполнены следущее условия: $S(x)$ непрерывна на $[a; b]$, и при $x_1 \leqslant x_2$, $x_1, x_2 \in [a; b]$ проекция $\Phi(x_1)$ на плоскость YOZ содержится в проекции $\Phi(x_2)$. (*Другими словами, тело расширяется в направлении от a к b.*)

Тогда объём тела равен $\int\limits_a^b S(x)dx$.

Доказательство.

Обозначим $V(x)$ объём части тела, соответствующего отрезку $[a; x]$, и рассмотрим изменение объёма при малом изменении аргумента:

$$S(x)\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant S(x + \Delta x)\Delta x,$$

где $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$, поскольку фрагмент тела будет содержаться в цилиндре, порожденном сечением $\Phi(x + \Delta x)$ и содержать цилиндр, порожденный сечением $\Phi(\Delta x)$.

Разделим неравенство на Δx и рассмотрим предел при $\Delta x \to 0$. Получим:

$$S(x) \leqslant V'(x) \leqslant S(x),$$

откуда $V'(x) = S(x)$. Поскольку $V(a) = 0$, то

$$V(b) = \int\limits_a^b S(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a; b]$. Тогда объём тела, полученного при вращении соответствующей криволинейной трапеции вокруг оси Ox, будет равен

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Для доказательства достаточно убедиться, что $S(x) = \pi f^2(x)$.

2. Решение задач.

1) Найдите площадь круга радиуса R.

2) Найдите объём шара радиуса R.

3) Найдите объём конуса радиуса R и высоты H.

4) Найдите объём пирамиды площади основания S и высоты H.

3. Интеграл в физических задачах.

Покажем, например, что работа, совершаемая под действием переменной силы, вычисляется с помощью интеграла. Пусть материальная точка под действием силы F движется прямолинейно вдоль оси Ox из точки a в точку b.

Если $F = const$, то $A = F\Delta x = F(b-a)$. Пусть $F = f(x)$, то есть зависит от положения точки. Тогда, рассмотрев маленький отрезок Δx и изменение работы на нём, рассуждая уже известным образом, можно получить, что производная работы равна силе, а из начальных условий получим, что $A = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Задача. Сила упругости пружины, растянутой на 5 см, равна 3Н. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее на 10 см?

4. Некоторые свойства первообразных и интегралов.

1) Четная функция, непрерывная на $[-a;a]$, имеет на этом промежутке по крайней мере одну нечетную первообразную.

Доказательство: $\forall x \in [-a;a]$ $f(-x) = f(x) \Rightarrow -F(-x) = F(x) + C$; $F(x)$ непрерывна на $[-a;a]$, поэтому среди всех первообразных найдется такая, что $F(0) = 0$, тогда $C = 0$, то есть $F(-x) = -F(x)$, ч. т. д.

Почему не все первообразные нечетны? Из-за различных C, например, $f(x) = \cos x$; $F(x) = \sin x + 1$.

2) Любая первообразная нечетной функции, непрерывной на $[-a;a]$, является четной.

Доказательство: $\forall x \in [-a;a]$ $f(-x) = -f(x) \Rightarrow F(-x) = F(x) + C$; т.к. при $x = 0$ $C = 0$ и $F(x)$ непрерывна, то других C быть не может, то есть $F(-x) = F(x)$, ч. т. д.

3) Если $f(x)$ — четная функция, непрерывная на $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

4) Если $f(x)$ — нечетная функция, непрерывная на $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

5) Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)dx$.

Верно ли, что первообразная периодической непрерывной функции является периодической? Нет, например, $f(x) = \cos x + 1$; $F(x) = \sin x + x + C$.