Уроки №35-36 28-29.10.10

Интегрирование по частям.

---

1. Разбор домашнего задания.

Если подынтегральная функция представляет собой $\sin^n x \cos^m x$, то интеграл вычисляется следующим образом:

а) n — нечетно, тогда сделаем замену $t=\cos x$, $dt=-\sin x dx$, $\sin^{n-1} x=(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}$;

б) m — нечетно, тогда сделаем замену $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$, $\cos^{m-1} x=(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}$;

в) n и m оба четны, тогда выражаем $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ через $\cos 2x$ и получаем сумму интегралов со степенями меньше, чем n и m.

Например, $\int \sin^3 dx = -\int (1-t^2)dt$, где $t=\cos x$.

8) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}$:

здесь нужна замена следущего вида: $x=a\sin t$, где $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, тогда $dx=a\cos t dt$, $\frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}=\frac{1}{|a|^3}\frac{1}{\cos^3 t}$ (поскольку $\cos t>0$). Поэтому

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}=\frac{a}{|a|^3}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{a}{|a|^3}\operatorname{tg} t+C=\frac{a\sin t}{|a|^3\cos t}+C=$$
$$=\frac{x}{|a|^3\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

2. Интегрирование по частям.

Рассмотрим функцию $f(x)=u(x)v(x)$. Из свойств дифференциала следует, что $df(x)=u(x)dv(x)+v(x)du(x)$. Возьмем интеграл от обеих частей, получим $f(x)+C=\int u(x)dv(x)+\int v(x)du(x)$, откуда $\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)+C$, или

$$\int UdV=UV-\int VdU.$$

1) Вычислите $\int x\sin x dx$.

Решение: пусть $u(x)=x$, $dv(x)=\sin x dx$, тогда можно взять $v(x)=-\cos x$ и

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx+C=-x\cos x+\sin x+C.$$

Вычислите:

2) $\int x^2\cos 3x dx$; 3) $\int x^3 \operatorname{arctg} 2x dx$; 4) $\int x\sqrt{2x+1}dx$.

Во 2 задаче $U = x^2$, $dV = \cos 3x dx$; ответ $\frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$.

В 3 задаче: $U = \operatorname{arctg} 2x$, $dV = x^3 dx$; $\int \frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt = \int (t^2-1)dt + \int \frac{dt}{t^2+1}$, ответ $\frac{1}{4}x^4 \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{32}x - \frac{1}{64}\operatorname{arctg} 2x + C$.

В 4 задаче: $U = x$, $dV = \sqrt{2x+1}dx$; ответ $\frac{(2x+1)(3x-1)\sqrt{2x+1}}{15} + C$.

5) Вычислите $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение: пусть $u(x) = \operatorname{arctg} x$, $dv(x) = dx$, тогда можно взять $v(x) = x$ и

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int x d \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Вычислите:

6) $\int (3x^2+2x+1)\ln x dx$; 7) $\int \ln x dx$; 8) $\int (3x^2+6x+5)\operatorname{arctg} x dx$.

В 6 задаче: $U = \ln x$, $dV = (3x^2+2x+1)dx$; ответ $(x^3+x^2+x)\ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + C$.

В 7 задаче: $U = \ln x$, $dV = dx$; ответ $x(\ln x - 1) + C$.

В 8 задаче x^3+3x^2+5x надо будет столбиком поделить на x^2+1, и проинтегрировать как сумму, ответ $(x^3+3x^2+5x+3)\operatorname{arctg} x - 2\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} - 3x + C$.

3. Домашнее задание.

1) $\int e^x(2x^2+x+1)dx$; 2) $\int (x+1)\sin 5x dx$; 3) $\int \frac{(1+2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\int \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right)^2 dx$; 5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.