Уроки №7-8 09.09.10

Сравнение показательной, степенной и логарифмической функций.

1. Комментарии к домашнему заданию.

3) В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр с наибольшей площадью осевого сечения. Найдите размеры цилиндра.

Ответ: $\frac{H}{2} \times \frac{R}{2}$.

4) В какой точке графика $f(x) = 2x^4 - x$ надо провести касательную, чтобы она пересекла прямые $x = 1$ и $x = 2$ в точках с наибольшей суммой ординат?

Решение: $y = (8x_0^3 - 1)x - 6x_0^4$; $S(x_0) = y(1) + y(2) = -3(4x_0^4 - 8x_0^3 + 1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$; $S'(x_0) = -24x_0^2(2x_0 - 3)$; $x_0 = 1,5$ — единственная точка экстремума (точка максимума).

5) Буровая вышка B расположена в поле в 9 км от ближайшей точки C дороги. С нее надо отправить курьера в населенный пункт A, расположенный на дороге на расстоянии 15 км от C. Скорость курьера по полю 8 км/ч, а по дороге — 10 км/ч. Каким образом должен двигаться курьер, чтобы прибыть в A как можно быстрее?

Решение: Пусть курьер движется сначала по отрезку BD через поле, потом по DA по дороге. Обозначим $CD = x$ км, $t(x) = \frac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \frac{15-x}{10}$; $x \in [0; 15]$; $t'(x) = 0$ при $x = 12$; $t(0) = 2,625$; $t(12) = 2,175$; $t(15) = \frac{\sqrt{306}}{8}$; ответ: $CD = 12$.

2. Свойства показательной, степенной и логарифмической функций.

6) Докажите, что при $\alpha > 0$ и $x > 0$ можно выбрать M такое, что $\frac{x^\alpha}{e^x} < M$.

Пусть $f(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}$, она непрерывна на $(0; +\infty)$. $f'(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}e^x - e^x x^\alpha}{e^{2x}} = \frac{x^{\alpha-1}(\alpha - x)}{e^x}$. $f'(x)$ обращается в нуль только в точке $x = \alpha$, и это точка максимума. Поэтому если выбрать $M > f(\alpha)$, получим требуемое неравенство.

***Определение* 1.** Функция $y = f(x)$ растет быстрее функции $y = g(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Теорема 1. Показательная функция $f(x) = a^x$ при $a > 1$ растет быстрее, чем любая степенная функция $g(x) = x^\alpha$, при $\alpha > 0$.

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{e^{x\ln a}}{x^{\frac{\alpha}{\ln a}\ln a}} = \left(\frac{e^x x}{x^{\frac{\alpha}{\ln a}+1}}\right)^{\ln a} = \left(\frac{e^x x}{x^\beta}\right)^{\ln a}$, где $\beta > 0$. Тогда по задаче 6 получаем, что существует $M > 0$ такое, что $h(x) > \left(\frac{x}{M}\right)^{\ln a}$ при $x > 0$. Поскольку $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Теорема 2. Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ при $a > 1$ растет медленнее, чем любая степенная функция $g(x) = x^\alpha$, при $\alpha > 0$.

Доказательство. Сделаем замену $x = a^t$, тогда $t = \log_a x$, при $x \to +\infty$ выполнено

$t\to+\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\log_a x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{a^{t\alpha}}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{a^t}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha=+\infty$.

Следствие. При $n\in\mathbb{N}$ $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln^n x=0$.

Доказательство. Сделаем замену $x=\frac{1}{e^t}$. Тогда $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln^n x=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^n}{e^t}=0$.

3. Решение задач.

Вычислите: 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^{-x}+x^2+3}{5^{-x}-4x^2-7}$; 13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+\ln x+2x^3}{\ln^3 x+3\ln x-3x^3}$.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

14) $y(x)=x(2-\ln x)^2$; 15) $f(x)=x^x$.

Решение: $D(f)=(0;+\infty)$, функция непрерывна и положительна на $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x}=1$. На бесконечности: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=+\infty$.

$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=x^x(\ln x+1)$, $\frac{1}{e}$ — точка минимума, $f''(x)>0$, функция выпукла вниз.

16) Исследуйте функцию $f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x^2}$ и постройте ее график.

17) Решите неравенство $\ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}$.

4. Домашнее задание. Задачи 8, 9, 10, 11, 16, 17.

Уроки №9-10 14-15.09.10

Исследование функций для решения задач.

---

1. Комментарии к домашнему заданию.

8) Число 54 представьте в виде трех слагаемых так, чтобы второе было в два раза больше первого, а произведение всех трех было наибольшим.

Идея решения: возьмем числа x, $2x$ и $54-3x$ и найдем точку максимума функции $2x^2(54-3x)$ на интервале $(0;54)$, получим $x=12$, откуда следует ответ.

9) Сравните $\sin 1+\sin 3$ и $2\sin 2$.

Идея решения: неравенство Йенсена ($\frac{1+3}{2}=2$, $\sin x$ выпукла вверх на $[0;\pi]$) либо сумма синусов.

10) Найдите количество корней уравнений: $x^3=\sqrt[3]{x}$; $e^x=\ln x$; $x^2=2^x$.

а) Если в уравнении встречается корень нечетной степени n, как правило, под корнем подразумевается не арифметический, а корень уравнения $x^n=a$, поэтому $D(\sqrt[3]{x})=\mathbb{R}$. Функции x^3 и $\sqrt[3]{x}$ взаимно обратны, значит, их графики пересекаются на прямой $y=x$. Уравнение $x^3=x$ имеет не более трёх корней, значит, $x^3=\sqrt[3]{x}$ тоже имеет не более трех корней. Подбором легко найти корни 0 и ±1, следовательно, есть три корня.

б) Легко доказать, что $e^x>x$ (например, вычислив производную разности), следовательно, уравнение $e^x=x$ корней не имеет, а значит и $e^x=\ln x$ не имеет корней.

в) При $x < 0$ 2^x монотонно возрастает, а x^2 монотонно убывает, причем их разность меняет знак, значит, есть один отрицательный корень. При $x > 0$ легко подбираются корни $x = 2$ и $x = 4$. Чтобы доказать, что других нет, исследуем функцию $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$. Она непрерывна на $(0; +\infty)$, и ее производная $f'(x) = \frac{2^x}{x^3}(\ln 2 \cdot x - 2)$ меняет знак с минуса на плюс в точке $x = \frac{2}{\ln 2}$. Значит, прямая $x = 1$ может иметь не более двух общих точек с графиком $f(x)$.

11) Исследуйте функцию и постройте ее график: $f(x) = \cos x - \ln\cos x$.

Идея решения: $D(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, на $D(f)$ функция непрерывна, чётная, периодическая с периодом 2π, поэтому рассмотрим ее только на $[0; \frac{\pi}{2})$: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, $f(0) = 1$. Производная: $f'(x) = \operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} \geqslant 0$, обращается в нуль только в точке $x = 0$, следовательно, функция возрастает, а в нуле имеет минимум (касательная параллельна оси абсцисс). $f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x \geqslant 0$, обращается в нуль только при $x = 0$, следовательно, функция выпукла вниз на всем промежутке.

16) Исследуйте функцию $f(x) = \frac{e^{2x-1}}{x^2}$ и постройте ее график.

Идея решения: $D_f = \mathbb{R} \subset \{0\}$, непр. на D_f, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, значит, $x = 0$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = +\infty$.

$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}}{x^3}(x-1)$, ее знаки: $\boxed{+ \mid 0 \mid - \mid 1 \mid +}$ $f(x) \uparrow$ на $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$; в точке 1 минимум, $f(1) = e$.

$f''(x) = \frac{2e^{2x-1}}{x^4}\left(2x^2 - 4x + 3\right) > 0$ на D_f, следовательно, график выпуклый вниз.

17) Решите неравенство $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$.

Решение: пусть $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$, тогда $D_f = (-1; +\infty)$, f непрерывна на D_f, и $f'(x) = \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0$, следовательно, $f(x)$ монотонно возрастает. При этом $f(0) = 0$, значит, при $x < 0$ $f(x) < 0$, а при $x > 0$ $f(x) > 0$, откуда решением неравенства является множество $(0; +\infty)$.

2. Домашнее задание.

1) Исследуйте функцию $f(x) = xe^{1-x^2}$ и постройте ее график.

2) Сколько корней имеет уравнение: $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$?

3) При каких значениях a уравнение $x\ln|x| = a$ имеет единственный корень?

4) Исследуйте функцию $g(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ и постройте ее график.

5) Повторить решение простейших тригонометрических неравенств.

Следующий урок — самостоятельная работа.