Еще про комплексную плоскость (15/12/09)

12. Пусть на плоскости даны две точки, A и B, и фиксирована полуплоскость α относительно прямой AB. Для каждой точки C полуплоскости α на сторонах AC и CB треугольника ACB внешним образом строятся квадраты $AKLC$ и $CMNB$. Докажите, что все, полученные таким образом, прямые KN проходят через одну точку.

13. В пятиугольнике $ABCDE$ треугольники ABC и CDE — правильные, O — центр треугольника ABC, M — середина BD, N — середина AE. Докажите, что треугольники OME и OND подобны.

14. Треугольники OAA', OBB' и OCC' — правильные, P — середина отрезка $A'B$, Q — середина $B'C$, R — середина $C'A$. Докажите, что треугольник PQR — правильный.

15. Используя операции сложения, вычитания, умножения, деления комплексных чисел, а также взятия сопряжённого, запишите уравнение вида $f(z) = 0$, множеству решений которого на плоскости соответствует **а)** данная окружность; **б)** данная прямая, в частности, ось абсцисс и ось ординат.

16. В треугольнике ABC проведена высота AP, отмечена точка пересечения медиан M и точка Q описанной окружности такая, что хорда AQ параллельна BC. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

17. Докажите, что скалярное произведение векторов, соответствующих комплексным числам a и b, равно $\frac{a\bar{b}+\bar{a}b}{2}$.

18. Пусть на комплексной плоскости задана прямая. Задайте комплексным числом перпендикуляр к этой прямой.

19. На единичной окружности с центром в начале координат даны точки A и B, соответствующие комплексным числам a и b. Найдите комплексное число, соответствующее точке пересечения касательных к данной окружности, проведённых через данные точки.

20. Докажите, что сумма $MA_1^2 + \ldots + MA_n^2$ не зависит от выбора точки M на окружности, описанной вокруг правильного n-угольника $A_1 \ldots A_n$.

Дополнительный листочек по комплексной плоскости (24/12/09)

1. Докажите, что уравнение $z\bar{z} = r^2$ соответствует окружности с центром в начале координат и радиусом r.

2. Пусть при умножении **любого** комплексного числа a на ε соответствующая точка A с координатой a поворачивается на угол φ вокруг начала координат.

а) Докажите, что ε — комплексное число.

б) Найдите модуль и аргумент ε.

в) Изобразите на координатной плоскости число ε, ε^2, $\bar{\varepsilon}$, $-\varepsilon$, ε^n.

г) Запишите координату точки Z', полученную поворотом точки $Z(z)$ вокруг точки $P(p)$ на угол 3φ.

д) Докажите, что сумма векторов, направленных и центра правильного многоугольника ко всем его вершинам, равна нулю.

3. Докажите, что треугольник с координатами вершин a, b и c является правильным тогда и только тогда, когда выполнено равенство $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ или $c + b\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0$, где ε — комплексное число с модулем 1 и аргументом $\frac{\pi}{3}$.

4. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

5. Точка M — середина дуги $\breve{AB}$ окружности. Докажите, что для произвольной точки этой окружности N имеет место равенство $|AM^2 - AN^2| = AN \cdot BN$.

6. Докажите, что диагонали вписанного в окружность четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

7. Дана окружность с центром в начале координат и точка $P(p)$ окружности.

а) Докажите, что уравнение касательной к окружности в точке P имеет вид $\bar{p}z + p\bar{z} = 2$, если радиус окружности равен 1.

б) Запишите уравнение касательной для произвольного радиуса окружности.

8. В результате поворота на 90° вокруг точки O отрезок AB перешел в отрезок A_1B_1. Докажите, что медиана треугольника OAB_1 перпендикулярна прямой AB.

9. Пусть вокруг треугольника описана окружность с центром в начале координат. Докажите, что основание высоты, опущенной из вершины a, имеет координаты $\frac{1}{2}(a + b + c - \bar{a}bc)$.

10. Из основания треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответственные этой высоте. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.