Задачи – 3.

1. Многогранник называется правильным, если его грани – равные правильные многоугольники, и во всех вершинах сходится одно и то же число рёбер. Докажите, что правильных многогранников не более пяти (с точностью до преобразования подобия в пространстве).
2. **а)** В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку. Какое наибольшее число цветков могло быть подарено? **б)** Тот же вопрос, если в классе 21 человек.
3. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 77 другими. Найдите n (укажите все возможности).
4. Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в роду имели по трое детей, за исключением 7 мужчин, не оставивших потомства. Всего в роду было 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец тоже принадлежал роду)
5. Назовём человека нелюдимым, если у него не более 5 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые — нелюдимые. Докажите, что чудаков не больше, чем нелюдимых.
6. Петя красит клетки шахматной доски по одной в зелёный цвет, и каждый раз вписывает в клетку число её зелёных соседей (по углу или стороне). Какая сумма у него получится, когда он закрасит все клетки?
7. Агроном Цветочкин считает период из нескольких дней подряд удачным, если в нем нечётное число дней были дождливыми. Какое наибольшее число удачных периодов может случиться в июле? (Периоды могут пересекаться и даже входить друг в друга).
8. Существует ли выпуклый многогранник, в котором **а)** всего 13 граней, из них 7 треугольных и 6 восьмиугольных; **б)** всего 14 граней, из них 8 треугольных и 6 восьмиугольных?
9. В 17-угольнике проведены все диагонали, некоторые синим, остальные — красным цветом. Может ли получиться, что из каждой вершины выходит поровну синих и красных диагоналей?
10. В графе 100 вершин имеют степень 10, одна вершина имеет степень 13, и одна вершина имеет степень 1. Докажите, что граф связный.
11. Докажите, что в любой компании из 9 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.
12. Часть клеток шахматной доски покрашена в синий цвет, остальные — в красный. Известно, что хромая ладья не может пройти по синим клеткам с нижней горизонтали на верхнюю. Докажите, что король может пройти с левой вертикали на правую.
13. *Задача про футбольный мяч.* В графе все грани — либо пяти-, либо шестиугольники, причём в каждой вершине сходится ровно три ребра. Докажите, что пятиугольников двенадцать.
14. Докажите, что полный граф из пяти вершин не является планарным.
15. В деревне три домика и три колодца. Из каждого домика к каждому колодцу ведет тропинка. Докажите, что тропинки где-то пересекаются.
16. В компании из 15 тупоконечников и 15 остроконечников некоторые тупоконечники написали письма с претензиями некоторым остроконечникам, причём никакой тупоконечник никакому остроконечнику не писал более одного письма. Известно, что компанию можно единственным образом разбить на 15 пар, каждая из которых состоит из тупоконечника и остроконечника, получившего письмо от этого тупоконечника. Какое наибольшее число писем могло быть отправлено?
17. Степень каждой вершины графа не меньше трёх. Докажите, что в этом графе существует цикл, число рёбер в котором не делится на 3.
18. На прямой закрашено m непересекающихся отрезков. Известно, что для любого $h < 1$ существует пара закрашенных точек, расстояние между которыми равно h. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не меньше, чем $\frac{1}{m}$.
19. На каждом борту лодки должно сидеть по четыре человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причём десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать на правом, а девяти безразлично где сидеть?
20. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. **а)** Сколькими способами можно разложить в эти ящики 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? **б)** А если допустить, что могут быть и пустые ящики?
21. Играют в следующую игру: имеется 11 карточек с числами от 2 до 12. Двое игроков делят карточки между собой следующим образом: один берёт себе 5 карточек, но сам выбирает каких, другой — берёт оставшиеся 6 карточек. После этого подбрасывается два кубика, и выигрывает тот игрок, которому принадлежит карточка с выпавшим числом очков. Как бы вы действовали?
22. На олимпиаде дежурные рассаживают на один ряд семерых учеников. Какова вероятность того, что трое знакомых окажутся сидящими рядом, если дежурные не знают, что они знакомы?
23. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами из них можно выбрать 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?
24. Какова вероятность вытянуть из колоды (36 карт) четыре карты так, чтобы среди них наверняка оказался **а)** один туз, **б)** ни одного туза, **в)** все пики?
25. Придумайте многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, имеющий три действительных иррациональных корня, и найдите эти корни.
26. Найдите два корня уравнения $5x^6 - 16x^4 - 33x^3 - 40x^2 + 8 = 0$, произведение которых равно 1.
27. Найдите длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, если его объём равен 1, сумма длин рёбер равна $\frac{52}{3}$, а площадь поверхности равна $\frac{26}{3}$.
28. Рассмотрим многочлены вида $x^3 + ax^2 + bx + c$, имеющие три положительных корня. Какому дополнительному условию должны удовлетворять коэффициенты a, b и c многочлена для того, чтобы существовал треугольник, длины сторон которого равны корням многочлена?