Уроки №81-82 02.04.10

Производная

---

1. Разбор домашнего задания

1) $f(1)=1$, $f'(x)=3x^2$, $f'(-1)=3$. Уравнение касательной: $y-1=3(x-1)$ или $y=3x-2$. Пересечение: $x^3=3x-2$, то есть $(x-1)^2(x+2)=0$. Касание в $(1\,;\,1)$, трансверсальное пересечение в $(-2\,;\,-8)$.

2) Вычисляем производную в тройке: $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{25-(3+h)^2}-4}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-h^2-6h}{h\cdot(\sqrt{25-(3+h)^2}+4)}=-\frac{3}{4}$. Уравнение касательной $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$, то есть $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$. Эта прямая перпендикулярна радиус-вектору $(3\,;\,4)$, так как $\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$.

3) Вычисляем $\lim\limits_{h\to0}\frac{\operatorname{ctg}(x+h)-\operatorname{ctg}x}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(-h)}{h\sin(x+h)\sin x}=-\frac{1}{\sin^2x}$.

4) Производная $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. По условию должно быть $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Это значит, что $x_0=\frac{3}{4}$.

5) В начале координат прямой. А в $(1\,;\,1)$ это $\varphi=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Можно доказать, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$.

6) Дело сводится к пределу $\lim\limits_{h\to0}\frac{h\cdot\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$. Он не существует, так как выбирая $h_n=\frac{1}{\pi n}$ мы получим предел 0, а выбирая $h_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ мы получим предел 1.

7) Аналогично, дело сводится к пределу $\lim\limits_{h\to0}h\cdot\sin\frac{1}{h}$. Он равен 0, так как для всякого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, что из $|h|<\delta$ последует $\left|h\cdot\sin\frac{1}{h}\right|<\varepsilon$ — для этого достаточно взять $\delta=\varepsilon$.

2. Правила дифференцирования (арифметические свойства производной) и производная композиции.

Материал пока отсутствует

3. Домашнее задание

0) Подумайте, как обойти трудность с $\Delta g=0$ в доказательстве теоремы о производной сложной функции.

1) Вычислите $f'(x)$, если $f(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

2) Напишите уравнения горизонтальных касательных к графику $y=e^x(x^2+3x-39)$

3) Вычислите $f'(x)$, если $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

4) Известно, что $f(x)$ дифференцируема в $g(x_0)$, а $g(x)$ не имеет производной в x_0. Может ли $f(g(x))$ быть дифференцируемой в x_0?

5) Вычислите $f'(x)$, если $f(x)=\log_x(x^2+1)$.

6) Нарисованы два луча: $y=x-2$ для $x\leqslant2$ и $6-2x$ для $x\geqslant3$. Будем понимать их как графики некой функции $f(x)$ на $(-\infty\,;\,2]$ и $[3\,;\,+\infty)$ соответственно. Доопределите на отрезке $[2\,;\,3]$ $f(x)$ так, чтобы $f(x)$ была дифференцируема в любой точке $\mathbb{R}$. Вы можете считать, что $f(x)$ — многочлен третьей степени.

7) Придумайте такую $f(x)$, чтобы $f'(x)=\operatorname{tg}x$.