Уроки №75-76 23.03.10

Непрерывные функции

---

1. Задачи для тех, кому все понятно

Теорема 4. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.

3) f непрерывна на $[2;5]$, и принимает на нем только рациональные значения. Найдите $f(e)$ и $f(\pi)$, если $f(4)=\frac{7}{9}$.

4) f непрерывна на $[a;b]$, и $f([a;b])\subset[a;b]$. Докажите, что существует такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=c$.

5) f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f(f(x))=x$ для любого x. Докажите, что существует такая точка c, что $f(c)=c$.

6) Докажите, что не существует непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f, для которой выполнено, что $f(x)\in\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $f(x+1)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

7) f непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет период T. Докажите, что существует точка x_0 такая, что $f(x_0+\frac{T}{2})=f(x_0)$.

2. Разбор задач домашнего задания и самостоятельной работы

Теоремы.

Теорема о пределе композиции функций. Если $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=t_0$ и функция $y=f(t)$ непрерывна в точке t_0, то

$$\lim_{x\to x_0}f\big(g(x)\big)=f\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right)=f(t_0).$$

Доказательство. Пусть есть $\varepsilon>0$. Тогда из непрерывности f в точке t_0 следует, что

$$\exists\tau>0\ \mid\ |t-t_0|<\tau\ \Rightarrow\ |f(t)-f(t_0)|<\varepsilon.$$

Обратите внимание, что условие $|t-t_0|>0$ не нужно, поскольку f не просто имеет предел в t_0, но еще и этот предел равен $f(t_0)$, поэтому при $t=t_0$ $|f(t)-f(t_0)|=0<\varepsilon$. Таким образом, мы получили некоторое положительное число τ. Из существования предела $g(x)$ в точке x_0 следует, что

$$\exists\delta>0\ \mid\ 0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |g(x)-g(x_0)|<\tau.$$

Обозначим $t=g(x)$, тогда получим, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\tau(\varepsilon))$ такое, что

$$0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |g(x)-g(x_0)|=|t-t_0|<\tau\Rightarrow\ |f(t)-f(t_0)|=|f(g(x))-f(t_0)|<\varepsilon,$$

откуда очевидно следует утверждение теоремы.

Теорема о синусе и тангенсе маленького угла. Для $t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ выполнено $|\sin t|\leqslant|t|\leqslant|\operatorname{tg}t|$.

План доказательства. Рассмотрим $t\in(0;\frac{\pi}{2})$ и докажем, что $\sin t\leqslant t\leqslant\operatorname{tg}t$. Для этого нарисуем тригонометрическую окружность и заметим, что $\sin t$ — длина перпендикуляра к прямой, а t — длина дуги. Проведем хорду и воспользуемся тем, что перпендикуляр короче наклонной, а отрезок короче любой другой кривой с концами в тех же точках.

Кроме того, нарисуем ось тангенсов, и найдем площадь сектора круга, отсекаемого углом, а также площадь треугольника, образованного осью тангенсов и углом t, и сравним их, откуда получим оценку для $\operatorname{tg}t$.

Поскольку все функции нечетны, для отрицательных t будет верно то же самое неравенство с точностью до знаков $-$. Откуда следует утверждение теоремы.

Теорема о двух милиционерах.

1) Пусть $f(x)\leqslant y(x)\leqslant g(x)$ для всех $x>(<)M_0$. И пусть $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=a$, где $a\in\mathbb{R}$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y(x)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y(x)=a$.

Доказательство. Пусть есть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $M_1 \mid x > M_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ и существует $M_2 \mid x > M_2 \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon$. Выберем $M = \max(M_1, M_2, M_0)$, тогда

$$x > M \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ -\varepsilon < g(x) - a < \varepsilon \\ f(x) - a \leqslant y(x) - a \leqslant g(x) - a \end{cases} \Rightarrow -\varepsilon < y(x) - a < \varepsilon$$

откуда следует утверждение теоремы.

2) Пусть $f(x) \leqslant y(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. И пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда существует $\lim\limits_{x \to x_0} y(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = a$.

Докажите теорему самостоятельно. Обратите внимание, что придется рассматривать три различных δ.

Аналогично можно доказать утверждение, что если одна функция является бесконечно большой, а другая превосходит эту функцию (в окрестности точки или на бесконечности), то и другая функция также является бесконечно большой.

Разбор задач.

Надо запомнить, что вблизи нуля функции sin, tg, arcsin, arctg ведут себя как x (т.е. предел их отношения равен единице). Доказывается это все сведением к первому замечательному пределу. Для этого иногда приходится домножать и делить на аргумент, иногда выполнять замену переменных. В более сложных задачах можно уже не сводить все непосредственно к синусу, а пользоваться знанием о других трегонометрических функциях.

Задачи про корни и многочлены мы решали неоднократно, ничего нового там нет: умножение на сопряженное и разложение на множители. В задаче 12 умножать на сопряженное придется несколько раз.

3. Некоторые теоремы о напрерывных на отрезке функциях.

Аксиома Дедекинда:

Если множества $A, B \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим двум условиям:

1. $\forall a \in A, \forall b \in B$ *выполняется неравенство* $a \leqslant b$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, b \in B \mid b - a < \varepsilon$;

то существует и единственно такое число c, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$.

Пользуясь этой аксиомой, мы докажем несколько важных теорем, утверждения которых кажутся очевидными на первый взгляд, но на самом деле совсем не очевидны.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ разного знака (т. е. $f(a)f(b) < 0$), то существует $c \in (a; b)$ такое, что $f(c) = 0$.

Доказательство. Обозначим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Пусть есть $[a_i, b_i]$ такой, что $f(a_i)f(b_i) < 0$, тогда рассмотрим $f(\frac{a_i + b_i}{2})$. Если оно того же знака, что $f(a_i)$, тогда обозначим $a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$, а $b_{i+1} = b_i$. А если оно того же знака, что и $f(b_i)$, тогда наоборот. Таким образом, мы получим систему отрезков $[a_n; b_n]$, каждый следущий из которых в два раза короче предыдущего, и все $f(a_n)$ одного знака, а все $f(b_n)$ другого знака.

Пусть $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Тогда для A и B выполняется аксиома Дедекинда (проверьте!). Поэтому существует единственное c такое, что $a_n \leqslant c \leqslant b_n$. При этом, поскольку длина $[a_n; b_n]$ уменьшается со скоростью геометрической прогрессии, можно показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = c$.

Поскольку $f(x)$ непрерывна в c, существует предел по Гейне в этой точке, равный $f(c)$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(c)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = f(c)$. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенствах $f(c) = 0$.

Следствие. Если $f(x)$ — строго монотонна, то точка c — единственная.

Решим задачи с применением этой теоремы:

1) Докажите, что уравнение $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$ имеет решение на отрезке $[0; 2]$.

2) Докажите, что уравнение $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0$ имеет решение на отрезке $[0; \pi]$.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, $f(a) = A$ и $f(b) = B$ и $A \neq B$, то для любого $C \in (A; B)$ существует $c \in (a; b)$ такое, что $f(c) = .$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) = f(x) - C$, она непрерывна на $[a; b]$. $g(a) = A - C$, $g(b) = B - C$, поскольку C лежит между A и B, то $g(a)g(b) < 0$, откуда по теореме 1 существует c такое, что $g(c) = 0$, т. е. $f(c) = C$.

Следствие. 1) Если f монотонна на отрезке, то $E_f = [A; B]$ или $[B; A]$. 2) Если функция строго монотонна на отрезке, то каждое значение из отрезка $[A; B]$ она принимает ровно один раз.

Решите задачу 3.

Теорема 3. Если f непрерывна на $(a; b)$, и для всех $x \in (a; b)$ $f(x) \neq 0$, то на $(a; b)$ $f(x)$ сохраняет свой знак.

Доказательство. Пусть есть $x_1, x_2 \in (a; b)$ такие, что $f(x_1)$ и $f(x_2)$ разных знаков. Тогда по теореме 1 на $[x_1; x_2]$ есть нуль $f(x)$, что противоречит условию.

Теорема используется при решении задач методом интервалов.

***Определение* 1.** Функция $f(x)$ ограничена (сверху, снизу) на множестве, если для любого x из этого множества существует $M(m)$ такое, что $|f(x)| < M$ $(f(x) < M, > m)$.

Доказательство теоремы 4: пусть функция не ограничена на отрезке $[a_i; b_i]$. Тогда она, очевидно, не ограничена на какой-то из его половин. Выберем в качестве $[a_{i+1}; b_{i+1}]$ ту половину, на которой функция не ограничена. Таким образом, получим систему вложенных отрезков, как в теореме 1. Применим к левым и правым концам отрезков аксиому Дедекинда, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. При этом, поскольку на каждом из $[a_n; b_n]$ функция не ограничена, то для любого M существует $x_n \in [a_n; b_n]$ такой, что $|f(x_n)| > M$.

Очевидно также, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$. Но тогда по теореме Вейерштрасса последовательность ограничена, что противоречит нашему предположению.

Где в доказательстве используется непрерывность на отрезке, а не на интервале?

4. Домашняя работа

Обе группы:

Даны функции:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3}{x - 1}, x \neq 1, \\ a, x = 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 1, x \leqslant 2, \\ 3 - ax^2, x > 2; \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} -2\sin x, x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1) При каких значениях a функция $f(x)$ непрерывна в точке 1?

2) При каких значениях a и b функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

3) При каких значениях a и b функция $h(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

4) Докажите, что уравнение $3e^x - 2^{x+1} - 2 = 0$ имеет решение.

II группа:

$$5)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^2 x - 4\sin x + 1}{2x - \pi}; \qquad 6)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{8}} \frac{\sqrt{2} - \cos 2x - \sin 2x}{(8x - \pi)^2}; \qquad 7)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arcsin 2x) \cdot \operatorname{arctg} 2x}{(x - x^2)(\frac{\pi}{2} - \arccos x)}.$$