Предел последовательности

1. Определения и теоремы

***Определение* 1.** Пусть даны два непустых числовых множества. Зависимость между элементами этих множеств, при которой каждому элементу первого множества соответствует единственный элемент второго множества, называют функцией. Первое из этих множеств называется областью определения функции.

***Определение* 2.** Бесконечной числовой последовательностью называется функция, областью определения которой является множество всех натуральных чисел.

***Определение* 3.** Конечной числовой последовательностью называется функция, определённая на множестве первых k натуральных чисел.

***Определение* 4.** Если каждый член последовательности, начиная со второго, больше своего предыдущего, то последовательность называется возрастающей.

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n)$$

Если каждый член последовательности, начиная со второго, меньше своего предыдущего, то последовательность называется убывающей.

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n)$$

Убывающие и возрастающие последовательности называются монотонными.

***Определение* 5.** Последовательность называется невозрастающей (неубывающей), если каждый её член не больше (соответственно, не меньше) своего предыдущего.

***Определение* 6.** Последовательность называется ограниченной снизу, если все её члены не меньше некоторого числа.

$$(\exists m : \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geqslant m)$$

Последовательность называется ограниченной сверху, если все её члены не больше некоторого числа.

$$(\exists M : \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant M)$$

***Определение* 7.**
(1) Последовательность называется ограниченной, если она ограничена снизу и сверху, т. е.

$$\exists m, M : \forall n \in \mathbb{N}\ m \leqslant a_n \leqslant M$$

(2) Последовательность называется ограниченной, если найдётся такое положительное число, что все члены последовательности по модулю не превосходят этого числа, т. е.

$$\exists P > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| < P$$

***Определение* 8.** Последовательность (a_n) называется неограниченной, если для любого числа P можно указать номер n такой, что $|a_n| > P$

$$(\forall P\ \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| > P).$$

***Определение* 9.** Последовательность (a_n) имеет предел $+\infty$, если для любого положительного числа M существует такое число P, зависящее от M, что при всех $n > P$ выполняется неравенство $a_n > M$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall M > 0\ \exists P(M) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (n > P) \Rightarrow (a_n > M)$$

***Определение* 10.** Последовательность (a_n) имеет предел $-\infty$, если для любого отрицательного числа m существует такое число P, зависящее от m, что при всех $n > P$ выполняется неравенство $a_n < m$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall m < 0\ \exists P(m) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (n > P) \Rightarrow (a_n < m)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ иначе записывается $a_n \ \to +\infty(-\infty)$.

Определение **11.** Число A называется пределом числовой последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε существует такое число P, зависящее от ε, что при всех $n > P$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \\ &\forall \varepsilon > 0 \ \exists P(\varepsilon): \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (n > P) \ \Rightarrow \ (|a_n - A| < \varepsilon)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ иначе записывается как $a_n \to A$.

Если последовательность (a_n) имеет пределом некоторое число, то она называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

Теорема Предел постоянной последовательности, каждый член которой равен c, равен c.

Теорема о единственности предела Сходящаяся последовательность не может иметь более одного предела.

Теорема Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема Последовательность, имеющая бесконечный предел, неограниченна.

Теорема Предел последовательности не изменится, если в начале её приписать или исключить конечное число членов.

Определение **12.** Последовательность, составленная из некоторых членов данной последовательности без изменения порядка следования, называется подпоследовательностью данной последовательности. Подпоследовательность последовательности (a_n) обозначается (a_{n_k}), где k — номер соответствующего члена в подпоследовательности, а n_k — номер этого же элемента в последовательности.

Теорема Если данная последовательность имеет предел, то и любая её подпоследовательность имеет тот же предел.

Определение **13.** Суммой последовательностей $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(k)})$ называется последовательность $(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\ldots+a_n^{(k)})$.

Произведением последовательностей $(a_n^{(1)})$, $(a_n^{(2)})$, …, $(a_n^{(k)})$ называется последовательность

$$(a_n^{(1)} \cdot a_n^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_n^{(k)}).$$

Частным от деления последовательности (a_n) на последовательность (b_n), где $b_n \neq 0$, называется последовательность $(\frac{a_n}{b_n})$.

Теорема Предел суммы конечного числа сходящихся последовательностей существует и равен сумме их пределов.

Теорема Предел произведения конечного числа сходящихся последовательностей равен произведению их пределов.

Теорема Предел частного двух сходящихся последовательностей существует и равен частному их пределов, при условии, что предел последовательности делителя не равен 0.

Теорема Предел отношения ограниченной последовательности (a_n) к последовательности (b_n) такой, что $|b_n| \to \infty$, равен 0.

Теорема Если последовательность (a_n) стремится к нулю, а все её члены, начиная с некоторого номера P_1, положительны, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Теорема Предел отношения многочленов одинаковых степеней равен частному отделения коэффициентов при старших степенях делимого и делителя.

Теорема Предел отношения многочленов разных степеней равен нулю, если степень многочлена делимого меньше степени многочлена делителя.

Теорема Если сходящиеся последовательности (x_n) и (y_n) таковы, что $x_n \leqslant y_n$ при $n > P$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема о промежуточной последовательности Если последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) таковы, что $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при $n > P$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то и (y_n) — сходящаяся, причём $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема Вейерштрасса Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

2. Таблицы для определения пределов

Таблица для определения пределов суммы последовательностей $(a_n + b_n)$.

		1	2	3	4
	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ / $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	a	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$
c	b	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$
d	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?
e	$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
f	$\nexists$	$\nexists$	?	?	?

Таблица для определения пределов произведения последовательностей $(a_n \cdot b_n)$.

		1	2	3	4	5	6
	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ / $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$a>0$	$a<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$
c	$b>0$	ab	ab	0	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$
d	$b<0$	ab	ab	0	$-\infty$	$+\infty$	$\nexists$
e	0	0	0	0	?	?	?
f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	?
g	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	?
h	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	?	?	?	?

Таблица частного $(a_n : b_n)$.

		1	2	3	4	5	6
	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ / $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$a>0$	$a<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$
c	$b>0$	$\dfrac{a}{b}$	$\dfrac{a}{b}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$
d	$b<0$	$\dfrac{a}{b}$	$\dfrac{a}{b}$	0	$-\infty$	$+\infty$	$\nexists$
e	0^+	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	?
f	0^-	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	?
g	$0^{\text{з.п.}}$	$\nexists$	$\nexists$	?	$\nexists$	$\nexists$	?
h	$+\infty$	0^+	0^-	0	?	?	?
i	$-\infty$	0^-	0^+	0	?	?	?
j	$\nexists$	?	?	?	?	?	?

3. Решение задач

1) Доказать, что последовательность (a_n), $a_n = \dfrac{3n-1}{1-2n}$ ограничена. Прежде всего докажем, что (a_n) возрастает.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3\cdot(n+1)-1}{1-2\cdot(n+1)} - \frac{3n-1}{1-2n} = \frac{1}{4n^2-1} > 0$$

(т.к. $4n^2 - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$). Значит, она ограничена снизу первым членом: $m = a_1 = -2$. Теперь попытаемся найти верхнюю границу для (a_n)

$$\frac{3n-1}{1-2n} = -\frac{3n-1}{2n-1} = -\frac{(2n-1)\cdot 1,5 + 0,5}{2n-1} =$$
$$= -1,5 - \frac{0,5}{2n-1} < -1,5$$

при $n \in \mathbb{N}$. Итак, $a_n < -1,5$, т. е. $M = -1,5$. Можно было также заметить, что все члены этой последовательности отрицательны (т.к. $3n-1 > 0$, а $1-2n < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$), поэтому в качестве верхней границы можно было указать число 0. Если теперь перейти ко второму определению ограниченной последовательности, то можно непосредственно доказать, что границей P для данной последовательности является число 2. (Догадаться можно было, изобразив несколько её членов на числовой оси.)

$$\left|\frac{3n-1}{1-2n}\right| = \frac{3n-1}{2n-1} = 1,5 + \frac{0,5}{2n-1} \leqslant 1,5 + 0,5 = 2$$

(т. к. $2n-1 \geqslant 1$ при $n \in \mathbb{N}$).

2) Доказать, что при любом $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

I. Пусть $a > 1$. Докажем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > P) \Leftarrow \left(|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon\right).$$

Рассмотрим $|\sqrt[n]{a}-1|$. Т. к. $a>1$, то $\sqrt[n]{a}>1$ и, следовательно, $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1$.

$$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}<1+\varepsilon \Leftrightarrow a<(1+\varepsilon)^n.$$

(Т. к. обе части неравенства положительны.)

Используя неравенство Бернулли, имеем

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1+n\varepsilon.$$

Если $1+n\varepsilon>a$, то $(1+\varepsilon)^n>a$ по свойству транзитивности неравенств. Следовательно, при $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$ имеем $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$, т. е.

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0\ \exists P=\frac{a-1}{\varepsilon}:\\ &\forall n\in\mathbb{N}\quad (n>P)\Leftarrow\left(|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon\right),\end{aligned}$$

или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ при $a=1$, т.к. в этом случае мы имеем постоянную последовательность $a_n=1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

III. $0<a<1$, тогда $a=\frac{1}{b}$, где $b>1$.

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{1}=1$$

Доказано, что при любом $a>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

3) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n-1}{n^2+2}$. Воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя, т. к. обе последовательности — расходящиеся, поэтому используем основное свойство дроби: разделим числитель и знаменатель на n^2 и воспользуемся теоремой 1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-1}{n^2+2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=\\ =\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}&=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\\ =\frac{1-0-0}{1+0}&=1\end{aligned}$$

4) Доказать, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает. Действительно,

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<1+\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Это истинно, так как по неравенству Коши:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

Знак неравенства строгий (объясните, почему).

Докажем ограниченность этой последовательности сверху. По неравенству Коши

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}=1.$$

$$\text{Таким образом,}\quad\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}<1.$$

Возведём обе части в степень $n+2$ и умножим на 4. Получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4.$$

Теперь по теореме Вейерштрасса делаем вывод, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится. Этот предел, имеющий чрезвычайно большое значение в математике, обозначают e:

***Определение* 14.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

В курсе высшей математики доказывается, что это число иррациональное, $e \approx 2,718281828459045\ldots$.

5) Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$

6) Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$. (Указание: воспользоваться неравенством Бернулли.)

7) Какие из следующих последовательностей стремятся к ∞, а какие просто неограничены: $x_n = n$; $x_n = n\cdot(-1)^n$; $x_n = n^{(-1)^n}$;

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{для } n \text{ чётных} \\ \sqrt{n}, & \text{для } n \text{ нечётных} \end{cases}$$

8) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0.$

9) Доказать, что число 2 не является пределом последовательности: 1; 3; $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$; …; $\frac{1}{n}$; $2\frac{1}{n}$; … .

Вычислите:

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ldots\sin(\sin(\sin(\sin 1)))\ldots)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n^2+1}{4-n^3+n}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^5+5n}{2n-1}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n-1}{1-2n^3}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^{20}\cdot(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}l}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{(5n-1)^5}$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$;

31) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$.

32) Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$; … .

33) Найти число членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, а разность равна 1, если сумма всех её членов равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеющей вторым членом $15\frac{3}{7}$, а третьим $13\frac{11}{49}$.

4. Домашнее задание

Решите задачи 5-10, 12, 14, 15, 17, 20, 21.

5. Решение задач

Решите оставшиеся задачи листочка.