Уравнения, сводящиеся к квадратным и однородным

1. Проверочная работа Диктант формул + 1(2) задачи из д/з. 5(7) минут.

2. Разбор домашнего задания

№11 — необходимо учитывать область допустимых значений, иначе могут появиться посторонние корни:

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 2x} = 1+\cos 4x \iff \begin{cases} \dfrac{1}{1-\operatorname{tg}^2 2x} = 2\cos^2 2x; \\ \operatorname{tg}^2 2x \neq 1; \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x = 1; \\ \operatorname{tg} 2x \neq \pm 1; \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos 4x = \dfrac{1}{2}; \\ 2x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \iff x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$$

№12 — заметим, что sin и cos по модулю не превосходят единицы, поэтому равенство трём может достигаться только в случае, когда $\sin 2x = 1$ и $\cos x = \pm 1$ одновременно. При решении этой системы получаем, что $x \in$.

№13 — разберём один из способов решения.

$$\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3 \iff \begin{cases} (I)\ \ 2\sin^2 x\cos x + 2\sin x - 3\cos x = 0; \\ (II)\ \ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Решим (I):

$$\begin{gathered} 2\sin^2 x\cos x - \cos x + 2\sin x - 2\cos x = 0 \\ \cos x(2\sin^2 x - 1) + 2(\sin x - \cos x) = 0 \\ \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2(\sin x - \cos x) = 0 \\ (\sin x - \cos x)(\sin x\cos x + \cos^2 x + 2) = 0 \end{gathered}$$

Ясно, что делать с первым множителем, что же касается второго, то уравнение $\sin x\cos x + \cos^2 x + 2 = 0$ можно свести к так называемому *однородному* уравнению:

$$\sin x\cos x + 3\cos^2 x + 2\sin^2 x = 0$$

Это уравнение можно разделить либо на $\cos^2 x$, либо на $\sin^2 x$, и получить квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$, соответственно. В данном случае нам удобно разделить на $\sin^2 x$, поскольку мы знаем, что $\sin x \neq 0$:

$$3\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0.$$

Ответ: $\{\pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Обратите внимание, что при решении этого уравнения мы неоднократно применили следующий метод: представление числа в виде суммы квадратов sin и cos.

3. Решение уравнений.

1. $\dfrac{1}{\cos^2 2t} - \dfrac{1}{\sin^2 2t} = \dfrac{8}{3}$;
2. $5\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 3\sqrt{3}$;
3. $7 + 4\sin x\cos x + \dfrac{3}{2}(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;
4. $\operatorname{ctg} t - \sin t = 2\sin^2\dfrac{t}{2}$;
5. $\sin 2x = \cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2}$.

Ответы: 1: $\{\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k\}$, 2: $\{\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\}$, 3: $\{-\frac{\pi}{12} + \pi k; -\frac{5\pi}{12} + \pi k\}$, 4: $\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\}$, 5: $\{\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\}$, везде $k\in\mathbb{Z}$.

4. Домашнее задание. Доделать всё нерешённое, из Кванта: 8.72авд, 8.73б, стр. 172 №1 или стр. 173 №2 на доп. оценку (в первом опечатка, должно быть $\frac{\pi}{6}-$, а не $+$).