

Комбинаторика.

Теория и разминка.

Решение комбинаторных задач, как правило, сводится к вычислению количества способов собрать какой-то объект из отдельных частей при соблюдении ряда условий. При вычислении количества способов обычно используют умножение и сложение. Сравните два пункта следующей задачи

1) В оркестре служат 10 мартышек, 7 козлов, 5 ослов и 3 косолапых мишки. Сколькими способами можно из них выбрать для участия в конкурсе им. Крылова: а) квартет из мартышки, осла, козла и косолапого мишки; б) трио из 3 животных разных видов?

Среди задач "на умножение" нужно запомнить три основные, комбинируя которые можно решить более сложные задачи.

2) (Число перестановок.) Сколькими способами можно поставить в ряд n различных предметов?

3) (Число размещений.) Сколькими способами можно выбрать k предметов из n различных и поставить их в ряд?

4) (Число сочетаний.) Сколькими способами можно выбрать k предметов из n различных и свалить их в кучу? (Иначе: сколько k -элементных подмножеств у n -элементного множества?)

Ответы к этим задачам принято записывать специальными сокращёнными обозначениями. Число перестановок обозначают $P_n = n!$, число размещений — $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, число сочетаний — $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Читаются эти записи так: "эн-факториал", "А из эн по ка", "Цэ из эн по ка".

Задачу иногда можно решить по-разному.

5) Сколько подмножеств у n -элементного множества?

Задачи:

6) На окружности отмечены 5 красных и 7 синих точек. Рассмотрим всевозможные отрезки (хорды) с концами в отмеченных точках. а) У скольких отрезков концы одинакового цвета? б) У скольких отрезков концы разного цвета?

7) На окружности отмечены 5 красных, 7 желтых и 9 зеленых точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках, у которых все вершины а) зеленые; б) одноцветные; в) все разноцветные; г) не все одноцветные?

8) На обед принцессе всегда подают одни и те же 44 блюда, при этом некоторые из них она может даже не попробовать. Каждый день принцесса решила обедать по-разному. Как долго ей это будет удаваться?

9) В классе 21 человек. а) Сколькими способами Андрей Анатольевич может построить их всех в шеренгу? Сколько среди этих способов таких, что: б) Коля стоит впереди Никиты (не обязательно подряд); в) Коля и Никита стоят рядом; г) Коля и Никита не стоят рядом?

10) Сколько шестизначных чисел содержат хотя бы одну четную цифру?

11) В обычном домино на половинках доминошек бывает от 0 до 6 точек. Всего в комплекте 28 доминошек. А сколько доминошек будет в комплекте, где на половинке возможно от 0 до 13 точек?

12) Есть 6 видов конфет, по мешку каждого вида. Сколько существует способов угостить ими 6 девочек так, чтобы каждой хоть что-то досталось, но ни одной не попало двух одинаковых конфет?

13) В колоде 32 карты. Сколькими способами можно раздать по 10 карт трем игрокам при игре в преферанс?

14) На спортплощадке встретились 10 мальчиков. Сколькими способами могут они разделиться на две волейбольные команды а) так, чтобы в одной было 6 человек, а в другой 4; б) по 5 человек в каждой?

15) Сколькими способами можно разбить 20 человек на пары?

16) Провели все диагонали выпуклого n -угольника, никакие 3 не пересеклись в одной точке. Сколько точек пересечения получилось?

17) В классе 17 мальчиков и 4 девочки. Сколькими способами Андрей Анатольевич может построить их в шеренгу так, чтобы никакие две девочки не стояли рядом?

18) На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?