Программа майского зачета

1. Два доказательства теоремы Пифагора. Обратная теорема.
2. Формула Герона.
3. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны *3*, *4* и *5*.
4. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD, если AC = a.
5. Окружности радиусов R и r (R > r) касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. Найдите длину ее отрезка, заключенного между точками касания.
6. Окружности радиусов R и r (R > r) касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных и их общей внешней касательной.
7. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Доказательство соотношений с помощью теоремы Пифагора и без нее.
8. Тригонометрические функции острого угла.
9. Тригонометрические тождества.
10. Найдите $\sin 15°$, $tg\ 75°$.
11. Теорема о вписанном угле и ее следствия.
12. Теоремы об угле между хордами и об угле между секущими.
13. Два критерия вписанности четырехугольника.
14. Геометрическое местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.
15. Точки Брокара.
16. Теорема об угле между касательной и хордой.
17. AA_1 и BB_1 – высоты треугольника ABC. Докажите, что $\angle A_1B_1C = \angle ABC$.
18. Докажите существование ортоцентра с помощью вписанных углов.
19. Докажите, что ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.
20. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно его стороны, принадлежит описанной окружности.
21. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны BC, принадлежит описанной окружности и является диаметрально противоположной вершине A.
22. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Продолжения высот треугольника, проведённых из вершин A и C , пересекают окружность в точках E и F соответственно, D – произвольная точка на (меньшей) дуге AC , K– точка пересечения DF и AB , L – точка пересечения DE и BC. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр треугольника ABC.
23. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1 и CC_1.
24. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекают описанную окружность в одной и той же точке.
25. Докажите, что биссектриса CL делит пополам угол между медианой CM и высотой CH треугольника ABC (AC ≠ BC) тогда и только тогда, когда $\angle C = 90°$.
26. Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.
27. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1 и CC_1.
28. Докажите, что в любом треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.
29. Прямая Симсона.
30. Теорема Сальмона. Пусть на трех хордах одной окружности PA, PB и PC как на диаметрах построены окружности. Тогда эти окружности попарно пересекаются вторично в трех коллинеарных точках.
31. Точка Микеля полного четырехсторонника.
32. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников, образованных при пересечении четырех прямых общего положения, лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.
33. Теорема Микеля о шести окружностях.
34. Теорема Помпею. Если точка M принадлежит окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, то один из отрезков AM, BM и CM равен сумме двух других.
35. Теорема Мансиона. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.
36. Теорема Штейнера-Лемуса. Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.