8-В класс.   Геометрия – 44   30 апреля 2009 г

Поворот

Определение. ***Поворотом*** R_O^a *с центром О на угол* α *в заданном направлении называется такое преобразование плоскости, при котором точка О отображается на себя, а произвольная точка А – на такую точку В, что ОА = ОВ и* $\angle AOB = \alpha$*, причем этот угол отложен от луча ОА в заданном направлении.*

Будем считать угол поворота в направлении против часовой стрелки положительным, а против часовой стрелки – отрицательным.

Теорема. *Поворот является движением.*

1. Какое движение обратно повороту?
2. Какие точки неподвижны при повороте?
3. Какие фигуры переходят в себя при некотором повороте?

*   *   *

1. Чем является поворот на 180°?
2. Приведите пример фигуры, которая:
   а) имеет более одного центра поворота (не на 180°);
   б) не имеет ни осей, ни центров симметрии, но переходит в себя при некотором повороте;
   в) переходит в себя при некотором повороте, центр которого ей не принадлежит.
3. Чему равен угол между прямой и ее образом при повороте на угол α?
   Указание. Рассмотрите сначала прямую, проходящую через центр поворота.
4. Пусть М и К – середины сторон CD и DE правильного шестиугольника ABCDEF. Найдите угол между прямыми АМ и ВК.
5. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD взяты соответственно точки D_1, A_1, B_1, и C_1, делящие его стороны в равных отношениях при обходе по часовой стрелке. При пересечении прямых AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 образуется четырехугольник KLMN. Докажите, что он является квадратом.

Задача на 5

6. На сторонах треугольника АВС построены вне его равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1 и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что эти отрезки: а) равны между собой; б) пересекаются под углом 60°; в) пересекаются все три в одной точке.

8-В класс.   Геометрия – 45   14 мая 2009 г

Поворот-2

1. Как построить образ данной: а) прямой; б) окружности при данном повороте?
2. а) Докажите, что треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда при повороте на 60° относительно точки А вершина В переходит в С. б) Сформулируйте аналогичный факт для прямоугольного равнобедренного треугольника.
3. Постройте квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.
4. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD взяты соответственно точки D_1, A_1, B_1, и C_1, делящие его стороны в равных отношениях при обходе по часовой стрелке. При пересечении прямых AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 образуется четырехугольник KLMN. Докажите, что он является квадратом.
5. Через точку внутри данного круга с центром О проведите такую хорду АВ, чтобы угол АОВ имел заданную угловую величину.
6. а) Квадрат вписан в параллелограмм (т. е. четыре точки, отмеченные по одной на каждой стороне параллелограмма являются вершинами квадрата). Докажите, что их центры совпадают.
   б) Впишите квадрат в данный параллелограмм.
7. ***Точка Торричелли***. На сторонах треугольника АВС построены вне его равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1 и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что эти отрезки:
   а) равны между собой;
   б) пересекаются под углом 60°;
   в) пересекаются все три в одной точке;
   г) если эта точка находится внутри треугольника АВС, то сумма расстояний от нее до трех вершин треугольника равна каждому из отрезков AA_1, BB_1, CC_1.
8. ***Задача Ферма***. Пусть все углы треугольника меньше 120°. Найдите в этом треугольнике точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Домашнее задание.

9. Пусть М и К – середины сторон CD и DE правильного шестиугольника ABCDEF. Найдите угол между прямыми АМ и ВК.
10. Дан треугольник АВС. На его сторонах построены внешним образом квадраты АВМК и ВСХУ.
    а) Докажите, что отрезки МС и АУ равны и перпендикулярны.
    б) Докажите, что середины отрезков АС и МУ и центры построенных квадратов являются вершинами еще одного квадрата.
11. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая – на данной прямой, третья – в данной точке.
12. С помощью циркуля и линейки постройте на сторонах ВС и CD параллелограмма ABCD точки М и N так, чтобы угол при вершине А равнобедренного треугольника MAN был равен данному углу α.
13. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* взяты точки *M* и *K* соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.