

**Площадь-4 (вычисление отношений)**

- Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника ABCD, равна половине площади ABCD.
- ABCD – выпуклый четырехугольник, его диагонали пересекаются в точке O, причем  $AO : OC = 2 : 3$ ,  $BO : OD = 4 : 5$ .  $S_{ABCD} = S$ . Найдите площади треугольников AOB, BOC, COD и DOA.
- Диагонали четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что
 
$$S_{ABC} : S_{ADC} = BO : OD.$$
- На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки E и D, причем  $AE : EC = 5 : 3$ ,  $BD : DC = 2 : 7$ . Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите  $BO : OE$ ,  $AO : OD$ .
- На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, E, M. Отрезки BM и KE пересекаются в точке O. Известно, что  $AK : KB = 2 : 5$ ,  $BE : EC = 4 : 3$ ,  $AM : MC = 3 : 1$ . Найдите  $BO : OM$  и  $KO : OE$ .
- На сторонах AD, BC и CD параллелограмма ABCD отмечены соответственно точки T, K и M, делящие их в отношениях  $AT : TD = 3 : 7$ ,  $BK : KC = 1 : 5$ ,  $CM : MD = 1 : 4$ . Найдите, в каком отношении отрезки AM и KT делятся их точкой пересечения.

**Домашнее задание**

- Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.
- ABCD – выпуклый четырехугольник, его диагонали пересекаются в точке O. Известно, что  $S_{AOB} = S_1$ ,  $S_{BOC} = S_2$ ,  $S_{AOD} = S_3$ . Найдите  $S_{COD}$ .
- На стороне AB параллелограмма ABCD отмечена точка K, причем  $AK : KB = 1 : 2$ . Отрезок KC пересекает диагональ BD в точке M.  $S_{BMC} = S$ . Найдите площади треугольников BKM, CMD и четырехугольника AKMD.
- Точки E и F делят сторону AB параллелограмма ABCD в отношении  $AE : EF : FD = 1 : 2 : 2$ , точка K делит сторону BC в отношении  $1 : 3$ , точка M делит сторону CD в отношении  $CM : MD = 3 : 4$ . В каком отношении прямая EM делит отрезок KF?
- Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, а стороны BC – в точке K. Определите, в каком отношении отрезки CM и AK делятся их точкой пересечения, если  $AB = 10$  см,  $BC = 15$  см,  $AC = 13$  см. (Для решения двух последних задач используйте площадь)

**Площадь-5 (трапеция, отношения и равносоставленность)**

- Докажите, что если ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, то  $S_{ABD} = S_{ACD}$ . Верно ли обратное?
- Докажите, что если ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, и ее диагонали пересекаются в точке O, то  $S_{AOB} = S_{COD}$ . Верно ли обратное?
- ABCD – трапеция с основаниями AD и BC, и ее диагонали пересекаются в точке O. Известно, что  $S_{BOC} = S_1$ ,  $S_{AOD} = S_2$ . Найдите  $S_{ABCD}$ .
- Докажите лемму о трапеции: *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее сторон, делит основания трапеции пополам.*  
Указание: Используйте отношение площадей и теорему Чевы.
- Прямые, проходящие через точку на стороне треугольника и параллельные двум другим сторонам, отсекают от него два треугольника с площадями  $S_1$  и  $S_2$ . Найдите площадь данного треугольника.
- Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что площадь части четырехугольника, заключенная между этими отрезками, ровно втрое меньше площади исходного четырехугольника.

**Домашнее задание**

- Докажите, что площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, проведенного из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую сторону.
- Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Они разбивают его на шесть частей, три из которых – треугольники с площадями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Найдите площадь исходного треугольника.
- Докажите, что если два треугольника, получающиеся при продолжении сторон выпуклого четырехугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.
- На стороне OE треугольника POE отмечены точки B и L так, что  $OB = BL = LE$ , точка M делит сторону PE в отношении  $PM : ME = 2 : 7$ , точка R делит сторону PO в отношении  $OR : RP = 3 : 8$ . В каком отношении отрезки BM и RL делятся их точкой пересечения?
- Средины M и N сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD соединены с концами противоположных сторон (M – с C и D, N – с A и B).
  - Докажите, что площадь треугольника ANB равна сумме площадей треугольников ADM и MCB.
  - Докажите, что площадь четырехугольника, ограниченного проведенными отрезками, равна сумме площадей треугольников, прилегающих к сторонам AD и BC.

**Задача на пятёрку.**

Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь этого пятиугольника.