XIX Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Существует ли трёхзначное натуральное число, удовлетворяющее двум условиям:
1) цифры в его десятичной записи попарно различны;
2) на русском языке оно записывается тремя словами так, что все слова начинаются с одной и той же буквы?

№2. В клетках таблицы $n \times n$ записаны в произвольном порядке попарно различные числа. Сначала упорядочили по возрастанию числа в каждой строке, затем это же сделали в каждом столбце. Можно ли утверждать, что после второй операции числа в строках по-прежнему записаны в порядке возрастания?

№3. Про некоторое натуральное число k известно, что числа $(2k + 1)$ и $(3k + 1)$ – точные квадраты. Докажите, что k делится на 40.

№4. Найдите все значения параметра a, при которых на графике функции $f(x) = \dfrac{8x^2 + (12a-5)x + 4a^2 - 3a}{2x^2 + 3ax + a^2}$ существуют такие четыре точки, что касательные к графику $f(x)$, проведённые в них, параллельны прямой $y = x$.

№5. Два треугольника единичной площади, симметричные относительно некоторой точки O, в пересечении образуют шестиугольник. Найдите наибольшее значение его площади.

II. Методический блок.

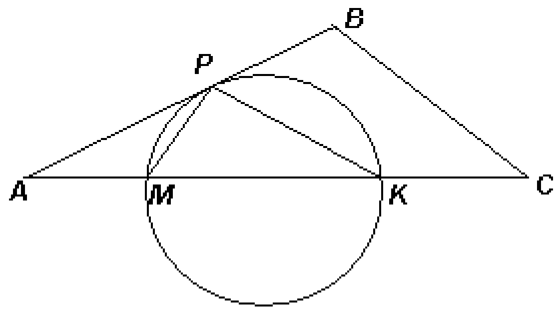
№6. Магазин дает Наташе персональную скидку 20% при покупке дыни. А еще у Наташи в этом месяце есть скидка по акции – 5%, которая применяется после всех других скидок и действует на весь чек. Наташа сходила в магазин и купила дыню весом 4,325 кг. Ей дали бумажный чек и еще прислали электронный чек в приложении. На бумажном чеке было написано:
Дыня Торпеда, кг
66.50 × 4.325 = 287.61
скидка = 15.14
Итого к оплате: 287.61
Скидки:
– Акция 15.14
– Персональная скидка 18.00
Ваша скидка составила 33.14
ИТОГ: 287.61
В приложении было написано так:
Покупка: 287.61р.
Скидка по акции: 15.14р.
Дыня Торпеда 4.325кг × 70.00 (Розничная Цена – 88.00) = 302.75р. (Скидка 77.85р.)
ИТОГО СКИДКА: 77.85р.

Найдите все ошибки в чеках. Правильно ли Наташе подсчитали скидки? И сколько же в итоге составила скидка?

В заданиях №7 и №8 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№7. «Задача». В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки M и K на расстоянии 2 и 6 от вершины A соответственно. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и K, и касающейся прямой AB, если $\angle BAC = 30°$.
«Ответ»: 2.

«Решение». Пусть P – точка касания AB и окружности (см. рисунок). По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности: $AP^2 = AK \cdot AM$, то есть $AP = \sqrt{12}$.



Из треугольника APM по теореме косинусов: $PM^2 = AP^2 + AM^2 - 2 \cdot AP \cdot AM \cdot \cos\angle BAC$ = $= 12 + 4 - 2 \cdot \sqrt{12} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$. Значит, PM = 2 = AM, то есть треугольник APM – равнобедренный. Тогда $\angle APM = \angle BAC = 30^\circ$, а $\angle PMK = 60^o$ (по свойству внешнего угла треугольника). Так как APM – угол между касательной и хордой, а PKM – вписанный угол, опирающийся на дугу PM, то $\angle PKM = \angle APM = 30^\circ$. Тогда угол MPK – прямой, значит, MK – диаметр данной окружности. Но $MK = AK - AM = 4$, поэтому искомый радиус окружности равен 2.

№8. Попарно различные действительные числа x_1, x_2,, ..., x_n таковы, что $x_1^{n-2}(x_1 - 1)^2$ = $x_2^{n-2}(x_2 - 1)^2$ = ... = $x_n^{n-2}(x_n - 1)^2$. При каждом натуральном n > 1 найдите сумму $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

«Ответ»: 2.

«Решение». Данные числа являются корнями многочлена $x^{n-2}(x-1)^2 - c$, где $c = x_i^{n-2}(x_i - 1)^2$. Приведем его к стандартному виду: $x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2} - c$. Тогда, используя теорему Виета, получим: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$ = $2^2 - 2 \cdot 1$ = 2.

III. Аналитический блок.

№9. Не секрет, что содержание работы учителя в значительной степени зависит от содержания независимых экзаменов (в настоящий момент, это ЕГЭ и ОГЭ). Давайте предположим, что Ваши ученики не должны сдавать никакие экзамены (и нет других форм внешнего контроля Вашей работы), а Вы просто хотите научить их математике.

Как бы Вы изменили содержание своей работы?

1) Какие разделы или темы школьной программы Вы бы не стали изучать вообще?
2) Изучение каких разделов или тем Вы бы существенно сократили?
3) Какие разделы или темы, которых в программе сейчас нет, Вы бы добавили?
4) Изучение каких разделов или тем существующей программы Вы бы расширили?
5) Изменили бы Вы методику (технологию) своей работы со школьниками? Если да, то как именно?

Свои ответы в каждом пункте, пожалуйста, обоснуйте. Не забудьте указывать классы, в работу с которыми Вы бы вносили те или иные изменения.