Московский центр непрерывного математического образования
Московский институт открытого образования Департамента образования города Москвы
Московский педагогический государственный университет
Московский городской педагогический университет

# Творческий конкурс учителей

Москва 5 декабря 2004 года

0. Заполните аккуратно и разборчиво анкету участника. Её у Вас заберут через час после начала конкурса.

1. Перенесите Ваш шифр с анкеты в листок регистрации и наклейте листок регистрации на обложку тетради. (Никак по-другому работу подписывать не требуется.) Запомните (или запишите) свой шифр — только по нему Вы сможете узнать итоги проверки Вашей работы.

2. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно чётко указать номер задания, переписывать условия не надо.

Вам предлагается два блока заданий:

№1 — №6. Задачи.

№7 — №12. Поиск математических ошибок в текстах.

Продолжительность конкурса — 4 часа.

---

**1.** Сумма ста чисел равна 1000. Самое большое из них увеличили в два раза, а еще одно число уменьшили на 10. Оказалось, что сумма не изменилась. Найдите самое маленькое из исходных чисел.

**2.** На доске написано число $19941995\ldots20032004$. Разобьем его десятичную запись произвольным образом на два числа и сложим их. С полученным числом проделаем аналогичную операцию и так до тех пор пока не получим однозначное число. Какие однозначные числа можно получить таким образом?

**3.** Внутри прямого угла $MPN$ проведен луч $PO$. В каждый из образовавшихся острых углов вписана окружность, причем обе они касаются луча $PO$ в точке $O$. Найдите длину отрезка $PO$, если радиусы окружностей равны 2 и 3.

**4.** Решите уравнение: $(2x+2)\,(5-2x)\,(4x^2+8x+11) = 10(2x+3)^2$.

**5.** Сумма плоских углов при вершине пирамиды больше $180°$. Докажите, что каждое её боковое ребро короче полупериметра основания.

**6.** Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники $2\times 1$. Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.

---

Перед Вами тексты, которые могут содержать математические ошибки. Ошибки могут быть как в формулировках утверждений, так и в их доказательствах (решениях).

В случае, если доказываемое утверждение верно, укажите ошибки в доказательстве.

Если утверждение неверно, объясните, почему это так, и найдите ошибку в доказательстве.

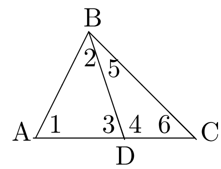
**7.** Сравните $\log_2 5 - \log_3 4$ и 1.

**Решение.** Пусть $A = \log_2 5 - \log_3 4 = \log_2 2,5 + 1 - 2\log_3 2 = y + 1$, где $y = \log_2 2,5 - 2\log_3 2$. Так как $0 < \log_3 2 < 1$, то $0 < 2\log_3 2 < 2$.

Так как $\log_2 2,5 < \log_2 4 = 2$, то $y < 0$. Следовательно, $A = y + 1 < 1$.

Значит, $\log_2 5 - \log_3 4 < 1$.

**8.** Сумма углов треугольника равна $180^o$.




**Доказательство.** Пусть $S$ — сумма углов треугольника $ABC$. Проведем отрезок $BD$ и пронумеруем получившиеся углы (см. рис).

Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = S$ (*) и $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = S$ (**).

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = S$ и $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ — так как эти углы смежные.

Сложим равенства (*) и (**): $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2S$; $S + 180^\circ = 2S$. Следовательно $S = 180^\circ$, ч. т. д.

**9.** Имеется ожерелье из пяти бусинок разного размера. Сколькими способами можно покрасить бусинки не более чем в пять цветов так, чтобы никакие две соседние бусинки не были одного цвета?

**Ответ:** 960.

**Решение.** Первую бусинку можно покрасить в любой из пяти цветов, то есть пятью способами, каждую из двух соседних — четырьмя способами, а из двух оставшихся: одну — четырьмя способами, а другую — тремя. Итого: $3 \cdot 4^3 \cdot 5 = 960$.

**10.** Найдите все уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ такие, что числа $p$ и $q$ являются его корнями.

**Решение.**

Первый способ. По теореме Виета:

$$\begin{cases} p + q = -p, \\ pq = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ q = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} q = -2, \\ p = 1. \end{cases}$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2 = 0$ и $x^2 - x - 2 = 0$.

Второй способ. Подставим числа $p$ и $q$ в данное уравнение:

$$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0, \\ q^2 + pq + q = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2 + q = 0, \\ q(q + p + 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0, \\ 2p^2 = 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} q = -p - 1, \\ 2p^2 - p - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} p = 1, \\ q = -2, \end{cases} \text{или} \begin{cases} p = -1/2, \\ q = -1/2. \end{cases}$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$ и $x^2 - (1/2)x - 1/2 = 0$.

**11.** Среди первообразных любой периодической функции, непрерывной на $\mathbb{R}$, найдется хотя бы одна периодическая функция.

**Доказательство.** Пусть $f(x)$ — периодическая функция, то есть, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$. Тогда $\int f(x+T)\,dx = \int f(x)\,dx$.

Если $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$, то первообразная функции $f(x+T)$ равна $F(x+T)$ (по теореме о первообразной композиции функций). Следовательно, полученное равенство интегралов равносильно тому, что $F(x+T) = F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$.

В частности, при $C = 0$ получим: $F(x+T) = F(x)$, то есть, $F(x)$ — периодическая функция.

**12.** Если центр окружности, проходящей через середины трех сторон треугольника, лежит на биссектрисе одного из его углов, то треугольник — равнобедренный.

**Доказательство.** Пусть центр $O$ окружности $S$, проходящей через середины $K$, $M$ и $N$ сторон $BC$, $AB$ и $AC$ соответственно, лежит на биссектрисе угла $A$. Пусть биссектриса угла $A$ пересекает окружность $S_1$, описанную около треугольника $AMN$, в точке $P$. Тогда $PM = PN$ (из равенства дуг следует равенство соответствующих хорд). Кроме того, $OM = ON$ (как радиусы окружности $S$). Поскольку точки $P$ и $O$ равноудалены от концов отрезка $MN$, то прямая $OP$, проходящая также через точку $A$, — серединный перпендикуляр к отрезку $MN$. Следовательно, $AM = AN$ и $AB = AC$.