28 января

Теория вероятностей

Тезисы

1. **Комбинаторика вторична и вспомогательна**. Задачи «с какой вероятностью получится слово СЛОН, если случайным образом выбрать буквы из другого слова» – дурной тон.
2. **Равновозможных событий в жизни нет**. Все модели с равновозможными исходами искусственны (игры).
3. Вероятно, **важнейший разумный итог – ЗБЧ**, откуда следует, что важнейшее место в школьном куре должны занять случайные величины, и их характеристики - математическое ожидание и дисперсия.
4. Существует большой класс разумных и в разной мере естественных задач **на оценку ожидаемых средних и рассеивания**, не зависящий от «классического» определения вероятности и комбинаторных фокусов.
5. Понятие о случайных величинах, МО и дисперсии **требует гораздо меньше подготовки, чем принято считать**.
6. В занятии рассматривается один из сильных и универсальных методов решения задач – метод *индикаторов*. Метод доступен учащимся 9–11 общеобразовательных классов. Рассматривается три базовые задачи, для самостоятельного разбора предлагается еще 8 задач и 3 задачи предлагаются для самостоятельного решения.

Индикаторы в решении задач

Индикатор события A – бинарная случайная величина I_A, которая принимает значения 0 (если событие A не произошло) или 1 (если оно произошло). Индикаторы дают возможность перейти от исчисления событий к обычным числовым величинам. При этом наибольшую пользу индикаторы приносят при решении задач, в которых фигурируют случайные величины, накапливающие свои значения в ходе случайного эксперимента. Очень часто удается такую случайную величину представить в виде суммы индикаторов некоторого семейства событий:

$$X = \sum_k I_k .$$

Тогда $\mathrm{E}X = \sum_k \mathrm{E}I_k$, причем ожидания $\mathrm{E}I_k$ вычислить очень легко. Разумеется, в конкретных задачах встречаются более сложные суммы – могут быть дополнительные слагаемые, индикаторы могут входить в сумму с различными весами, слагаемые могут получаться как произведения двух различных семейств индикаторов, но это не меняет сути метода.

Таким способом часто удается вычислить не только математическое ожидание, но и дисперсию случайной величины, даже в случае, когда индикаторы не являются независимыми. Для этого приходится находить распределения случайных величин вида $I_{A\cap B} = I_A I_B$ – индикаторов совместного наступления двух событий. Но, как правило, это намного проще, чем вычислять дисперсию непосредственно по формуле или придумывать какие-либо специфический способ для конкретной задачи.

Задачи для разбора на семинаре

1. Проводится серия из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа успехов. Ответ: np и npq.

2. На новогодней елке собрались гости. Каждый из гостей и хозяин заготовили подарок – гостинец: конфету, леденец, пряник или яблоко в карамели. Все гостинцы были повешены на елку, а затем были разыграны между гостями. Считая, что гостинцы разыгрывались чисто случайно, найдите математическое ожидание и дисперсию числа тех, кто получил свой же собственный гостинец. Ответ: 1 и 1.

3. Производится стрельба в мишень до первого попадания с вероятностью попадания при каждом отдельном выстреле p. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины «Число сделанных выстрелов». Ответ: $\frac{1}{p}$ и $\frac{q}{p^2}$.

Задачи с решением для самостоятельного разбора

4. Вася и Миша выполняли тест, в котором было 20 вопросов одинаковой сложности и к каждому вопросу даны варианты ответов. Поскольку ни Вася, ни Миша ничего не знали, они только угадывали ответы. Вася угадал верные ответы на 6 вопросов, а Миша – на 8 вопросов, не советуясь с Васей. Найдите математическое ожидание числа совпадений, то есть вопросов, где Вася и Миша оба угадали верные ответы или не угадали.

Решение. Пусть случайная величина I_k – индикатор совпадения в k-м вопросе, то есть $I_k = 1$, если Вася и Миша оба угадали или не угадали верный ответ на вопрос k, и $I_k = 0$, если один угадал, а другой – нет.

По условию Вася угадает верный ответ на этот вопрос с вероятностью $\frac{6}{20} = 0,3$, а Миша – с вероятностью $\frac{8}{20} = 0,4$. Не угадают ответ Вася и Миша с вероятностями $0,7$ и $0,6$ соответственно. Поскольку Вася и Миша трудятся независимо друг от друга, вероятность, что они оба угадают или оба не угадают ответ на этот вопрос, равна

$$0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,54.$$

Получаем распределение

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,46 & 0,54 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание равно $\mathrm{E}I_k = 0,54$. Случайная величина X «Число совпадений» равна сумме индикаторов совпадения по всем вопросам:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{20}.$$

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = 20\mathrm{E}I_1 = 20 \cdot 0,54 = 10,8.$$

Ответ: 10,8.

5. На конференцию приехали 18 ученых, из которых ровно 10 знают сногсшибательную новость. Во время перерыва (кофе-брейка) все ученые разбиваются на случайные пары, и в каждой паре каждый, кто знает новость, рассказывает эту новость другому, если тот её ещё не знал. Найдите математическое ожидание числа ученых, которые знают сногсшибательную новость после кофе-брейка.

Решение. Занумеруем каким-нибудь способом незнаек числами от 1 до 8 и введем индикаторы I_k по числу незнаек. $I_k = 1$, если во время кофе-брейка незнайка номер k стал знайкой, и $I_k = 0$, если он так и не узнал новость. Очевидно,

$$X = 10 + I_1 + I_2 + \ldots + I_8 .$$

Распределения всех индикаторов одинаковы:

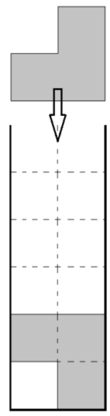
$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{17} & \frac{10}{17} \end{pmatrix},$$

поскольку в пару к любому незнайке может подсесть любой из оставшихся 17 ученых, и ровно 10 из них знайки. Следовательно, $\mathrm{E}I_k = \frac{10}{17}$. Тогда

$$\mathrm{E}X = 10 + \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_8 = 10 + 8 \cdot \frac{10}{17} = 14\frac{12}{17} \approx 14,7 .$$

Ответ: прибл. 14,7.

6. Высокий прямоугольник ширины 2 открыт сверху, и в него падают в случайной ориентации Г-тримино (см. рисунок). Упало k тримино. Найдите математическое ожидание высоты получившегося многоугольника.



Решение. Случайную величину «высота получившегося многоугольника» обозначим X. Очевидно, $X = 2k - \left(I_2 + I_3 + \ldots + I_k\right)$, где I_j – индикатор события «тримино с номерами j и $j-1$ образовали блок высоты 3». Вероятность этого равна $\frac{1}{8}$. Таким образом $\mathrm{E}\,I_j = \frac{1}{8}$. Поэтому $\mathrm{E}\,X = 2k - \frac{1}{8}(k-1) = \frac{15k+1}{8}$.

7. Ничьи (от 9 класса. 6 баллов). Две хоккейные команды одинаковой силы договорились, что будут играть до тех пор, пока суммарный счёт не достигнет 10. Найдите математическое ожидание числа моментов, когда наступала ничья.

Решение. Если $2n$ – максимальный суммарный счёт, то игру можно рассматривать как случайное блуждание длины $2n$: на каждом шаге разрыв в счете либо увеличивается на единицу, либо уменьшается на единицу.

Пусть I_{2k} – индикатор ничьей на $2k$ шаге:

$$I_{2k} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} & \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \end{pmatrix}.$$

Случайная величина X «число моментов, когда наступала ничья» равна сумме всех индикаторов. Это даёт решение:

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}I_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{2k}^{k}}{2^{2k}}.$$

При $n = 5$ получаем: $\mathrm{E}\,X = \frac{2}{4} + \frac{6}{16} + \frac{20}{64} + \frac{70}{256} + \frac{252}{2048} \approx 1{,}707$.

Ответ: прибл. 1,707.

Замечание. Если воспользоваться формулой Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$, то после преобразований получим:

$$\mathrm{E}\,X \approx \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

При $n = 5$ эта приближенная формула дает 2,823 (все знаки верные). Таким образом, даже для такого небольшого n относительная погрешность составляет около 4%, а с ростом n будет уменьшаться.

Дальнейшее упрощение (также приближенное) можно сделать, если заменить сумму подходящим интегралом. Например, так:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{n} \frac{1}{\sqrt{x + \pi/4}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{n + \pi/4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{\frac{4n}{\pi} + 1} - 1.$$

При больших n единица под корнем практически не играет роли, поэтому ее можно отбросить, получив еще более простую формулу

$$\mathrm{E}\,X \approx 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} - 1.$$

8. Последовательность состоит из k нулей и m единиц, расположенных в случайном порядке. Разобьем последовательность на чередующиеся группы нулей и единиц (группа – участок, состоящий из всех одинаковых цифр, стоящих подряд)[1]. Общее число групп – случайная величина. Найдите ее математическое ожидание.

Решение. Для каждого элемента последовательности определим случайную величину I_j – индикатор, который равен 1, если этот элемент – первый в своей группе. В противном случае $I_j = 0$. Очевидно, $I_1 = 1$. Для всех остальных индикаторов I_j вероятность события $I_j = 1$ равна вероятности того, что на $(j-1)$-м месте и на j-м месте стоят разные символы:

$$\mathrm{P}\left(I_j = 1\right) = \frac{k}{k+m} \cdot \frac{m}{k+m-1} + \frac{m}{k+m} \cdot \frac{k}{k+m-1} = \frac{2km}{(k+m)(k+m-1)}.$$

Следовательно, $\mathrm{E}I_j = \frac{2km}{(k+m)(k+m-1)}$. Общее число групп X равно числу первых элементов в группах, то есть

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{k+m}.$$

[1] Например, последовательность 00011011100 состоит из пяти групп 000, 11, 0, 111 и 00.

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = 1 + \left(k+m-1\right) \cdot \frac{2km}{\left(k+m\right)\left(k+m-1\right)} = 1 + \frac{2km}{k+m}.$$

Ответ: $1 + \dfrac{2km}{k+m}$.

Примечание. Любопытно, что в этой задаче результат связан со средним гармоническим числа единиц и числа нулей.

9. Благородные девицы пошли в театр. Девиц всего n, и билеты у всех на один ряд, в котором ровно n кресел. Если девице, чтобы занять свое место, нужно пройти мимо уже сидящей девицы, то последняя должна вежливо встать, чтобы пропустить подругу.

а) Найдите математическое ожидание числа вставаний.

б) Найдите математическое ожидание числа тех, кому не придётся встать ни разу.

Решение. а) Присвоим девицам номера, такие же, как номера назначенных им кресел и рассмотрим пристально двух каких-нибудь девиц. Одна из них должна пропустить вторую, только если вторая проходит дальше, а в очереди идёт прежде.

Используем индикаторы беспорядков: индикатор $I_{i,j}$ ($i<j$) равен 1, если девица j должна пропустить девицу i и 0 в противном случае. Очевидно, $\mathrm{E}\,I_{i,j} = \mathrm{P}\left(I_{i,j}\right) = \frac{1}{2}$. Суммируя ожидания всевозможных индикаторов (их ровно C_n^2), получим:

$$\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,I_{1,2} + \mathrm{E}\,I_{1,3} + \ldots + \mathrm{E}\,I_{i,j} + \ldots \mathrm{E}\,I_{n-1,n} = \frac{1}{2} \cdot C_n^2 = \frac{n\left(n-1\right)}{4}.$$

б) Пусть I_j индикатор события «девице с билетом на j-е кресло придется встать хоть раз». $I_j = 0$, только если девицы, у которых билеты на кресла 1, … $j-1$, прошли прежде j-й девицы. Вероятность этого $\dfrac{1}{j}$ (очевидно?). Отсюда

$$\mathrm{E}\left(I_1 + I_2 + \ldots + I_n\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = H_n \approx \ln n.$$

Ответ: а) $\dfrac{n\left(n-1\right)}{4}$; б) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \approx \ln n$.

10. Магазин «Крокус и Кактус» объявил акцию: если покупатель берет три товара, то самый дешевый из них ему достается бесплатно. Покупатель взял десять товаров, все разной цены: за 100 рублей, за 200 рублей, за 300 рублей и так далее – самый дорогой товар стоил 1000 рублей. Найдите математическое ожидание суммы, которую покупатель заплатит, если разложит покупки случайным образом.

Решение. Рассмотрим товар ценой $100k$ рублей ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Введем индикатор I_k, равный 1, если покупателю не пришлось за этот товар платить, и 0, если пришлось. Очевидно, что $I_{10} = I_9 = 0$.

В других случаях $I_k = 1$, только если вместе с товаром ценой $100k$ в одну тройку попали два из $10-k$ более дорогих товаров. Составить такую комбинацию можно C_{10-k}^2 способами. Вероятность такой комбинации равна $\frac{C_{10-k}^2}{C_9^2} = \frac{(10-k)(9-k)}{72}$. Число C_9^2 в знаменателе дроби – это общее количество способов отобрать в тройку с товаром ценой $100k$ два товара из девяти оставшихся.

Получается распределение

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2-19k+18}{72} & \frac{k^2-19k+90}{72} \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание: $\mathrm{E}I_k = \frac{k^2-19k+90}{72}$. Общая сумма, которую сэкономит покупатель, равна

$$S = 100I_1 + 200I_2 + ... + 1000I_{10} = 100(I_1 + 2I_2 + ... + 8I_8) = 100\sum_{k=1}^{8} kI_k .$$

Переходя к ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}S = 100\sum_{k=1}^{8} \frac{k(k^2-19k+90)}{72} =$$

$$= 100\left(\frac{72}{72} + 2\cdot\frac{56}{72} + 3\cdot\frac{42}{72} + 4\cdot\frac{30}{72} + 5\cdot\frac{20}{72} + 6\cdot\frac{12}{72} + 7\cdot\frac{6}{72} + 8\cdot\frac{2}{72}\right) = 916\frac{2}{3}.$$

Найдена ожидаемая экономия. Значит, ожидаемая сумма к оплате равна

$$\frac{100+1000}{2}\cdot 10 - 916\frac{2}{3} = 5500 - 916\frac{2}{3} = 4583\frac{1}{3} \text{ (рублей)},$$

то есть 4583 рубля и 33 копейки.

Ответ: а) 4000 р.; б) 4900 р.; в) 4583 р. 33 к.

11. Пять игральных костей бросают одновременно. Такой одновременный бросок нескольких костей будем называть *залпом.* Те кости, на которых выпали шестёрки, откладывают в сторону. А остальные бросают ещё раз – опять залпом. Те, что на второй раз не выпали шестёрками, бросают ещё раз и так далее, пока на всех костях не выпадут шестёрки.

а) Найдите математическое ожидание общего числа брошенных костей.

б) Найдите математическое ожидание общего числа очков, выпавших к моменту, когда все кости выпали шестёрками.

в) Найдите математическое ожидание числа залпов.

Решение. а) Рассмотрим какую-нибудь кость и индикатор I_k ($k = 1, 2, 3, ...$), который равен 0, если кость выпала шестёркой прежде, чем её бросили k раз, и 1 в противном случае, то есть если кость участвовала в k-м залпе. Очевидно,

$\mathrm{P}(I_1 = 1) = 1$ (в первом залпе кость точно участвует);

$\mathrm{P}(I_2 = 1) = \frac{5}{6}$ (во втором залпе кость участвует, только если первый раз не ней выпала не шестёрка);

$\mathrm{P}(I_3=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^2$ (в третьем залпе кость участвует, только если первые два раза на ней не выпадали шестёрки).

И так далее – вероятности $\mathrm{P}(I_k=1)$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{5}{6}$:

$$\mathrm{P}(I_k=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}\,I_k=0\cdot\mathrm{P}(I_k=0)+1\cdot\mathrm{P}(I_k=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Обозначим ξ число бросков, в которых участвовала эта кость. Тогда

$$\xi=I_1+I_2+I_3+\ldots\,.$$

Перейдём к сумме математических ожиданий:

$$\mathrm{E}\,\xi=\mathrm{E}\,I_1+\mathrm{E}\,I_2+\mathrm{E}\,I_3+\ldots=1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-5/6}=6.$$

Поскольку всего таких костей пять, математическое ожидание общего числа брошенных костей равно $5\cdot 6=30$.

б) Выберем какую-нибудь одну кость и проследим за ней. Общее число выпавших на ней очков (включая шестерку, которая выпадает при последнем броске), обозначим X. Введем индикатор I, который равен 0, если первый бросок дал шестёрку, или 1, если первый бросок не дал шестёрку. Назовём X_1 число очков при первом броске. Если первый бросок окончился не шестёркой, то выпавшее во время всех последующих бросков общее число очков назовем Y. Тогда

$$X=X_1+IY.$$

Индикатор I относится только к первому броску, а величина Y определяется исходами всех последующих бросков, но не первого. Поэтому I и Y независимы. Значит,

$$\mathrm{E}\,X=\mathrm{E}\,X_1+\mathrm{E}\,I\cdot\mathrm{E}\,Y.$$

Осталось заметить, что $\mathrm{E}\,X_1=3{,}5$, $\mathrm{E}\,I=\mathrm{P}(I=1)=\frac{5}{6}$, а $\mathrm{E}\,Y=\mathrm{E}\,X$, поскольку величины X и Y имеют одно и то же распределение. Значит,

$$\mathrm{E}\,X=3{,}5+\frac{5}{6}\mathrm{E}\,X,$$

откуда $\mathrm{E}\,X=21$.

Всего костей пять, поэтому математическое ожидание общего числа выпавших очков равно

$$5\cdot 21=105.$$

в) Для общности будем считать, что костей вначале не пять, а n штук. Пусть ξ_n – общее число залпов, которые потребуются, чтобы на всех n костях выпали шестёрки.

Пусть I_k – индикатор события «В результате первого залпа шестёрки выпали на k костях», где $k=0,1,\ldots,n$, и пусть после первого залпа осталось m костей ($m=0,1,\ldots,n$).

Пусть, наконец, η_m – общее число залпов, которые потребуются, чтобы m оставшихся костей выпали шестёрками после того, как первый залп сделан. $\mathrm{E}\xi_k = \mathrm{E}\eta_k$ для любого $k = 1,...,n$, поскольку величины ξ_k и η_k, хотя и различны, но имеют одинаковое распределение. Также известно, (см. пункт а), что $\mathrm{E}\xi_1 = \mathrm{E}\eta_1 = 6$.

Если в результате первого залпа шестёрок не выпало вовсе, то во втором залпе участвуют снова все n костей, и в этом случае $\xi_n = 1+\eta_n = 1+I_0\eta_n$.

Если первый залп дал одну шестёрку, то во втором залпе участвует $n-1$ костей, и поэтому $\xi_n = 1+\eta_{n-1} = 1+I_1\eta_{n-1}$.

Рассуждая так и далее, напишем формулу, учитывающую все случаи:

$$\xi_n = 1+I_0\eta_n + I_1\eta_{n-1} + I_2\eta_{n-2} + ... + I_{n-1}\eta_1.$$

Перейдем к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}\xi_n = 1+\mathrm{E}\left(I_0\eta_n\right)+\mathrm{E}\left(I_1\eta_{n-1}\right)+\mathrm{E}\left(I_2\eta_{n-2}\right)+...+\mathrm{E}\left(I_{n-1}\eta_1\right).$$

Величина η_k связана с опытом, не включающим первый залп, а величина I_{n-k} – индикатор события, связанного только с первым залпом. Следовательно, эти две случайные величины независимы. Поэтому

$$\mathrm{E}\xi_n = 1+\mathrm{E}\,I_0\,\mathrm{E}\eta_n + \mathrm{E}\,I_1\,\mathrm{E}\eta_{n-1} + \mathrm{E}\,I_2\,\mathrm{E}\eta_{n-2} + ... + \mathrm{E}\,I_{n-1}\,\mathrm{E}\eta_1.$$

Вводя короткое обозначение ε_k для $\mathrm{E}\xi_k$ (и, тем самым, для $\mathrm{E}\eta_k$), получаем:

$$\varepsilon_n = 1+\varepsilon_n\,\mathrm{E}\,I_0 + \varepsilon_{n-1}\,\mathrm{E}\,I_1 + \varepsilon_{n-2}\,\mathrm{E}\,I_2 + ... + \varepsilon_1\,\mathrm{E}\,I_{n-1} = 1+\varepsilon_n\,\mathrm{E}\,I_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{n-k}\cdot\mathrm{E}\,I_k,$$

откуда

$$\varepsilon_n\left(1-\mathrm{E}\,I_0\right) = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{n-k}\cdot\mathrm{E}\,I_k.$$

Осталось выяснить, чему равны $\mathrm{E}\,I_k$. Математическое ожидание $\mathrm{E}\,I_k$ равно вероятности получить ровно k шестёрок при первом залпе:

$$\mathrm{E}\,I_k = C_n^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k 5^{n-k}}{6^n}.$$

В частности, $\mathrm{E}\,I_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Поэтому

$$\varepsilon_n = \frac{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{C_n^k 5^{n-k}\varepsilon_{n-k}}{6^n}}{1-\left(5/6\right)^n} = \frac{6^n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}C_n^k 5^{n-k}\varepsilon_{n-k}}{6^n-5^n}. \qquad (0.1)$$

Получилась рекуррентная формула для вычисления ожиданий. Начиная с $\varepsilon_1 = \mathrm{E}\xi_1 = 6$, последовательно найдем:

$$\mathrm{E}\xi_2 = \varepsilon_2 = \frac{6^2+C_2^1\cdot 5\cdot 6}{6^2-5^2} = \frac{36+60}{36-25} = \frac{96}{11},$$

$$\mathrm{E}\xi_3 = \varepsilon_3 = \frac{6^3+C_3^1\cdot 5^2\cdot\frac{96}{11}+C_3^2\cdot 5\cdot 6}{6^3-5^3} = \frac{216+3\cdot 25\cdot\frac{96}{11}+3\cdot 5\cdot 6}{216-125} = \frac{10566}{1001}.$$

И так далее с помощью компьютера или калькулятора или компьютером. Округляя до сотых получаем:

$$\varepsilon_4 = 11{,}93,\ \varepsilon_5 = 13{,}02.$$

Ответ: а) 30; б) 105; в) прибл. 13,02.

Задачи для самостоятельного решения

12. У Васи 7 пар совершенно одинаковых носков. Каждый день в течение недели он надевал новую пару, а затем засунул все 14 носков в стиральную машину, где они хорошенько перемешались. Вынув носки из машины, Вася разложил их по парам как придется, поскольку носки неотличимы. Назовем пару носков устойчивой, если эти носки были на Васе надеты одновременно в какой-то день прошлой недели. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа устойчивых пар.

13. Обобщите задачу 12 на случай, когда Вася–многоножка (много равно n).

Комментарий. Есть гипотеза, что если X_n – число устойчивых (восстановившихся после случайной сборки) неупорядоченных наборов из n носков, то

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}X_n = \lim_{k\to\infty} \mathrm{D}X_n = \frac{1}{n},$$

где k – число постиранных пар (число дней недели на планете, где живет n-ногий Вася).

14. Из отрезка натурального ряда от 1 до n случайным образом выбирают k чисел. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы выбранных чисел.