ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М. А. ГОРЕЛОВ

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. СТЕПЕНЬ МНОГОЧЛЕНА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2013

УДК 519.8, 517.2

Ответственный редактор
доктор технических наук Ф.И. Ерешко

В классической теории оптимизации на решаемую задачу накладываются ограничения геометрического характера, типа дифференцируемости или выпуклости. А на практике задачи чаще всего задаются аналитически (явной формулой, дифференциальным уравнением и т.п.). В данной работе предлагается метод решения оптимизационных задач, использующий способ их аналитического задания. Если этот способ не слишком сложен, решение задачи может быть доведено до конца. Идея метода состоит в использовании вспомогательного многочлена. Если его степень не слишком высока, и удается локализовать корни многочлена, решение задачи оптимизации доводится до конца.

Ключевые слова: оптимизация, неравенства, малочлены.

Рецензенты: И.А. Копылов,
А.Ф. Кононенко

Научное издание

1. Введение

Данная работа представляет собой пятую часть исследования, начатого в [1–4]. Общее название всех этих работ отражает основную идею решения задач оптимизации. Ее смысл подробно изложен во введении к [1], а в двух словах заключается в следующем.

Чаще всего задача оптимизации задается аналитическими формулами. Если эти формулы простые, то можно использовать этот факт для того, чтобы получить решение задачи. Сложность формул можно определять по-разному, поэтому и реализуется данная идея различными способами.

В данной работе сложность задачи определяется степенью некоторого вспомогательного многочлена. Если степень многочлена равна n, то он не может иметь более n корней.

Иногда, исходя из соображений геометрического характера, удается приблизительно определить положение этих корней. А тогда можно найти интервалы, на которых этот многочлен сохраняет определенный знак. А это уже позволяет получить нетривиальную нижнюю оценку минимума (или верхнюю оценку максимума). Если вспомогательный многочлен подобран удачно, эта оценка будет не улучшаемой, что и даст решение оптимизационной задачи.

Таким образом, в основе предлагаемого метода лежит указанный выше алгебраический факт, и менее элементарная, но наглядно очевидная, теорема о промежуточном значении. Грубо говоря, эта теорема утверждает, что если непрерывная кривая соединяет две точки, лежащие по разные стороны от прямой, то прямая и кривая пересекаются.

Эти простые соображения позволяют решить достаточно большое число задач, в том числе и достаточно сложных, что и демонстрируется ниже.

Большинство этих задач заимствованы, но установить первоисточники не представляется возможным. Ссылки указаны для тех задач, которые предлагались на различных олимпиадах, поскольку соответствующие источники наиболее доступны, а «олимпиадные» решения естественно считать наиболее элементарными и красивыми. Читатель получает возможность сравнить их с приводимыми ниже. Ссылки даются после номера задачи в фигурных скобках, где указывается название олимпиады и год ее проведения. При этом используются сокращения, приведенные в приложении.

2. Геометрические основы

На протяжении всей работы будут использоваться некоторые понятия и результаты топологии – раздела современной геометрии, изучающего свойства геометрических объектов, не меняющиеся при непрерывных преобразованиях. Все они очень наглядны, поэтому их доказательства будут опущены. В следующих параграфах эти результаты будут применяться в сочетании с алгебраическими теоремами. А в задачах данного параграфа они работают в чистом виде.

Говорят, что примеры учат лучше правил. Вот первый из них.

Задача 1. {О.1998} По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Может ли оказаться при некотором начальном расположении и некоторых скоростях, что как бы долго они не ездили, у двух из них фляжка так и не побывает.

Решение. Выберем двух любых велосипедистов и обозначим их A и B. Докажем, что у одного из них фляжка непременно побывает. Построим графики движения выбранных спортсменов и фляжки (на рис. 1 графики движения A и B показаны сплошными линиями, графики остальных велосипедистов намечены точками, а график движения фляжки нарисован жирной

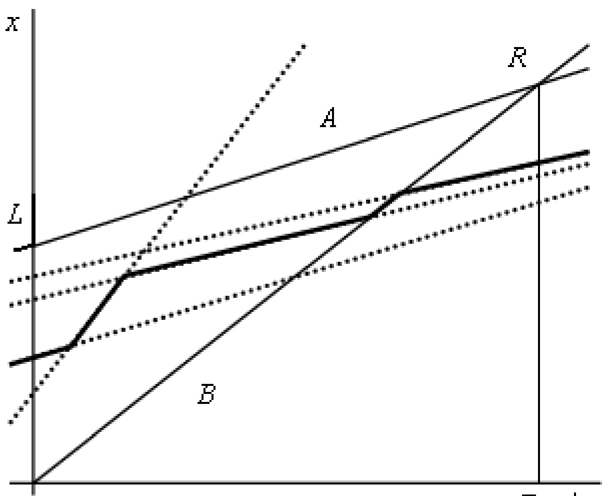

Рис. 1

линией). За начало координат примем момент времени, когда B обогнал A, и точку, в которой это произошло. Пусть в следующий раз B обгонит A в момент времени T, а длина трека равна L. Поскольку велосипедисты движутся по кругу, а значит, точки с координатами x и $x+L$ совпадают, у нас остается свобода выбора начальных значений координат. Выберем их так, что в начальный момент времени координата A равна L, координата B равна нулю, а координата фляжки лежит на отрезке $[0,L]$.

В силу последнего условия, график движения фляжки «входит» в треугольник $0LR$ через вертикальную сторону. Значит, он должен «выйти» из него через одну из других сторон. Но в момент первого пересечения графика движения фляжки с графиком движения велосипедиста фляжка по правилам переходит к нему.

Запишем эти рассуждения чуть более формально. Пусть $f(t)$ и $h(t)$ – координаты велосипедистов A и B в момент времени t, а $g(t)$ – соответствующая координата фляжки. В силу выбора начальных условий $f(0)\leq g(0)\leq h(0)$. Поскольку $f(T)=h(T)$, неравенства $f(T)<g(T)<h(T)$ не могут выполняться одновременно. Значит, либо $f(T)\geq g(T)$, либо $g(T)\leq h(T)$. В первом случае разность $f(t)-g(t)$ меняет знак на отрезке $[0,T]$, а потому обращается в ноль. А тогда велосипедист A непременно получает фляжку. Второй случай рассматривается аналогично.

Внимательный анализ приведенного решения показывает, что в нем неявно использовался следующий факт.

Теорема о промежуточном значении. Если непрерывная функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка она обращается в ноль.

В задаче 1 эта теорема применялась для кусочно-линейных функций. В этом случае она доказывается элементарными средствами (см. упражнение 1). В общем случае доказательство можно найти в [5] или в любом университетском учебнике математического анализа. Мы будем использовать как «очевидный» следующий геометрический факт: если непрерывная кривая соединяет две точки, лежащие по разные стороны от прямой, то она где-то пресекает эту прямую.

В приведенном решении спрятана еще одна важная топологическая концепция – понятие накрывающего пространства. В задаче 1 все объекты движутся по окружности. А в решении использовались графики движения по прямой. Нарисовать график движения объекта по окружности можно, но не очень удобно (подумайте, как этот график может выглядеть?). Но главная причина перехода к прямой состоит не в этом, а в том, что окружность устроена слишком сложно.

В решении использовался тот факт, что в начальный момент «координата фляжки лежит на отрезке $[0,L]$». Можно было бы сказать, что «фляжка лежит между велосипедистами A и B». Понятие «лежать между» является одним из основных понятий евклидовой геометрии. В большинстве аксиоматических систем оно является неопределяемым. На окружности придать содержательный смысл этому понятию нельзя.

Чтобы перейти от окружности к прямой, нужно эту прямую свернуть в виде спирали (как у электрической плитки) и расположить спираль так, чтобы ее ось была вертикальной, а витки располагались над треком. Тогда спираль «накроет» трек так, что над каждой точкой трека будет располагаться счетное число точек спирали. И координатой любой из этих точек можно характеризовать положение точки на окружности.

Но при этом возникнет очень большой произвол. Например, функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases} L, \text{ если } x \text{ рационально,} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

описывает вполне «физичное» движение по окружности (какое?). Чтобы избежать рассмотрения таких примеров, потребуем, чтобы движения всех объектов описывались непрерывными функциями. Тогда произвол существенно уменьшится.

А именно, если мы фиксируем какую-нибудь точку, которая в начальный момент времени находится над объектом на треке, то при непрерывном движении этого объекта по треку можно будет единственным способом двигать точку по накрывающей спирали так, чтобы она всегда находилась над объектом. Поэтому останется лишь счетное число функций, которые описывают движение объекта по треку.

В задаче 1 функции, описывающие движения велосипедистов будут линейными. Их графики будут прямыми. И каждому велосипедисту будет соответствовать счетное число параллельных прямых, лежащих на расстоянии L одна от другой. Точка пересечения любых двух прямых будет описывать встречу велосипедистов, поэтому придется на графике нарисовать все такие прямые.

Подробнее о понятии накрывающего пространства можно прочесть в [6–7].

Отметим, что в задаче 1 совершенно не важно, что трек является круглым. Он может быть овальным, или иметь более сложную форму, например, как трассы в гонках формулы 1. Важно только, чтобы у трека не было самопересечений. Если трек будет иметь самопересечения, например, он будет иметь форму «восьмерки», ситуация заметно усложнится.

Но вернемся к теореме о промежуточном значении. Пожалуй, в наиболее чистом виде этот факт используется при решении следующей задачи.

Задача 2. Турист вышел на рассвете из базового лагеря и к вечеру поднялся на вершину горы. Переночевав там, он утром следующего дня отправился в обратный путь и вечером вернулся в базовый лагерь. Докажите, что в какое-то время суток он находился на одной высоте при движении туда и обратно.

Решение. Нарисуем на одной координатной плоскости графики зависимости высоты туриста над уровнем базового лагеря от времени суток в два рассматриваемых дня (см. Рис. 2). Пусть $f(t)$ – высота в момент времени t при подъеме, а $h(t)$ – при спуске. Из законов физики следует, что функции f и h непрерывны. Согласно условию разность $f(0)–h(0)$ отрицательна, а разность $f(24)–h(24)$ положительна (время измеряется в часах). Поэтому найдется момент времени t, когда функция $f(t)–h(t)$ обращается в ноль. В этот момент $f(t)=h(t)$, что и требуется доказать.

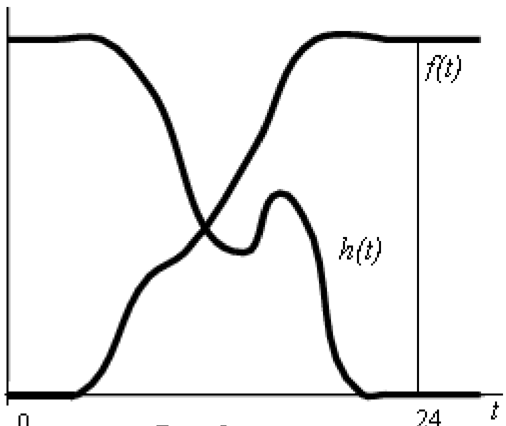

Рис. 2

Упражнения.

1. Отрезок $[a,b]$ разбит точками $a=c_0<c_1<\ldots<c_n=b$ на несколько частей. На $[a,b]$ задана функция $f(x)$ такая, что $f(x)=\alpha_i x+\beta_i$ для всех $x\in[c_i,c_{i+1}]$. Известно, что $f(a)<0$, а $f(b)>0$. Докажите, что существует точка $y\in[a,b]$ в которой $f(y)=0$.

2. Непрерывная функция $f(x)$ отображает отрезок $[0,1]$ в себя. Докажите, что найдется такое $y\in[0,1]$, что $f(y)=y$.

3. Числа a, b и c таковы, что система уравнений $y=ax+b$, $y=bx+c$, $y=cx+a$ имеет решение. Докажите, что $a=b=c$.

4. Из пункта A в пункт B ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что два мотоцикла, выехавшие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины, меньшей l, смогли доехать в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза диаметра l, центры которых движутся навстречу друг другу из A и B соответственно.

5. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 м сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент расстояние между кончиками их клювов было равно 110 м.

6. Пончик и Сиропчик делят бисквитный торт с кремом. Докажите, что можно одним прямолинейным разрезом разделить торт так, что друзьям достанется поровну и крема и бисквита.

7. Докажите, что всякий многоугольник M можно вписать в квадрат K так, что весь многоугольник будет лежать в квадрате, а на каждой стороне K найдется точка M.

3. Квадратные трехчлены

Далее будут рассмотрены задачи на наибольшие или наименьшие значения, в решении которых заметную роль играют графики некоторых функций. Изложение будет вестись по принципу «от простого – к сложному». А самые простые из интересных функций – многочлены второй степени. Вот первый пример.

Задача 3. (Конкурс СУНЦ МГУ, 2003 г.) Уравнение $ax^2-bx+c=0$, где a – натуральное число, а b и c – целые числа, имеет два различных корня, которые расположены строго внутри интервала $(0,1)$. Докажите, что $a\geq 5$.

Решение. Подумаем, что мешает коэффициенту a быть маленьким. По условию оба корня квадратного трехчлена ax^2-bx+c

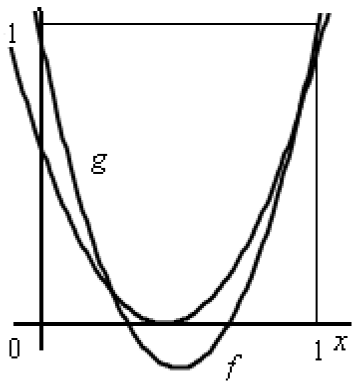

Рис. 3

лежат внутри отрезка [0,1], значит, на концах этого отрезка трехчлен принимает целые положительные значения, а, следовательно, эти значения не меньше 1. А вершина параболы, являющейся графиком этого квадратного трехчлена, лежит ниже оси абсцисс. Представим себе, что в точках с координатами (0,1) и (1,1) установлены упоры. Тогда парабола должна «втиснуться» между упорами так, чтобы дотянуться до оси абсцисс. Для этого она должна быть достаточно узкой. А парабола тем уже, чем больше ее старший коэффициент.

Допустим, что в вершину параболы помещен грузик и на него действует сила тяжести. Тогда самое низкое положение грузика будет соответствовать положению равновесия. А из физических соображений понятно, что в положении равновесия парабола должна проходить через оба упора. Отсюда следующее формальное решение.

Пусть $f(x)=ax^2-bx+c$. Нарисуем (см. рис. 3) графики многочленов $f(x)$ и $g(x)=4x(x-1)+1$ (его график лежит на опорах и достает до оси абсцисс). Эти графики не совпадают, потому что $g(x)$ неотрицателен, а $f(x)$ в какой-то точке $y\in(0,1)$ строго меньше нуля. Тогда $f(1)\geq g(1)$, $f(y)<g(y)$ и $f(1)\geq g(1)$. По теореме о промежуточном значении на каждом из интервалов $[0,y)$ и $(y,1]$ разность $f(x)-g(x)$ имеет корень. Но эта разность – квадратный трехчлен, а потому других корней нет. А значит, разность положительна для достаточно больших x. Но тогда старший коэффициент $f(x)$ больше старшего коэффициента $g(x)$, то есть $a>4$, что и требуется.

Задача 4. {О.1998} Про квадратные трехчлены с различными старшими коэффициентами известно, что их разности $f-g$, $g-h$, $h-f$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.

Решение. Ключевое геометрическое соображение состоит в следующем. График квадратного трехчлена делит плоскость на две части. Если график другого квадратного трехчлена имеет только од-

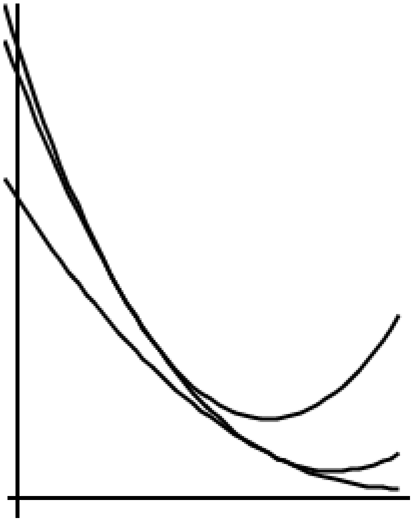

Рис. 4

ну общую точку с графиком первого, то он лежит в одной из этих частей, за исключением точки касания. Поэтому, если есть графики трех квадратных трехчленов, то один из них лежит между двумя другими, то есть разделяет их. А поскольку графики «крайних» трехчленов все-таки пересекаются, они могут пересечься только на графике «среднего». Проведем эти рассуждения строго.

Пусть многочлен $g(x)$ имеет средний по величине старший коэффициент. Тогда график многочлена, имеющего самый большой старший коэффициент, лежит выше графика $g(x)$ при больших значениях x. Но так как эти два графика пересекаются всего в одной точке, то же отношение верно при всех значениях x, кроме одного (см. рис. 4).

По аналогичным соображениям график третьего многочлена лежит ниже графика $g(x)$ во всех точках, кроме одной. Значит, графики этих многочленов f и h могут пересечься только на графике многочлена g. Но так как каждый из них имеет с g всего по одной общей точке, эти точки совпадают.

Задача 5. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox, на которых выполняется неравенство $\left|x^2 + px + q\right| \le 2$ не превышает четырех.

Решение. Нарисуем график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ с достаточно большим q и будем, не меняя p, уменьшать q. При этом график будет сдвигаться вниз. Пока q достаточно велико, этот график будет лежать выше полосы $-2\le y\le 2$ и утверждение задачи будет выполняться тривиально. В какой-то момент график пересечет прямую $y=2$ и решение неравенства $\left|x^2 + px + q\right| \le 2$ будет представлять собой отрезок. При движении графика вниз меньший корень уравнения $x^2+px+q=2$ будет уменьшаться, а больший – увеличиваться. То есть длина интересующего нас отрезка будет расти. Когда наи-

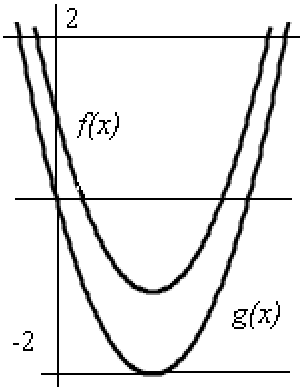

Рис. 5а

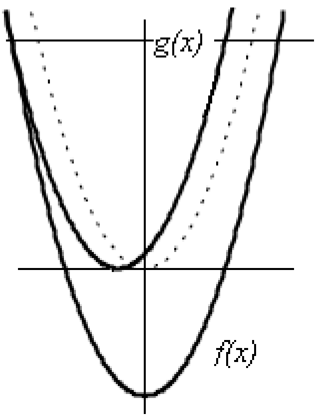

Рис. 5б

меньшее значение трехчлена x^2+px+q достигнет значения –2, это отрезок распадется на два равных. Причем чем глубже будет опускаться парабола, тем круче будут идти ее дуги внутри полосы $-2\le y\le 2$, и тем меньше будет суммарная длина этих двух отрезков. Поэтому максимальной суммарная длина отрезков будет тогда, когда вершина параболы лежит на прямой $y=-2$, а в этом случае она рана четырем. Перейдем к формальному доказательству.

Рассмотрим многочлен $y=x^2+px+q$. Возможны два случая: либо наименьшее значение этого многочлена не меньше –2, либо меньше.

В первом случае нарисуем графики квадратных трехчленов $f(x)=x^2+px+q$ и $g(x)=(x+p/2)^2-2$ (см. рис. 5а). Первый из них получается из второго параллельным переносом, и они не пересекаются (либо совпадают), так как их разность – константа. Неравенства $f(x)\ge -2$ и $g(x)\ge -2$ выполняются всегда. А так как $g(x)\le f(x)$, из условия $f(x)\le 2$ следует условия $g(x)\le 2$. Поэтому длина отрезка, на котором выполняется неравенство $\left|f(x)\right|\le 2$, не превосходит длины отрезка, на котором выполняется неравенство $\left|g(x)\right|\le 2$, а последняя рана четырем.

Во втором случае отметим корень x_0 уравнения $f(x)=x^2+px+q=2$ и нарисуем графики многочленов $f(x)$ и $g(x)=(x-x_0)(x-x_0-4)+2$ (см. рис. 5б). Второй многочлен построен так, чтобы его график касался прямой $y=-2$. Графики $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в точке x_0, а других точек пересечения нет, так как их разность – линейная функция. Наименьшее значение многочлена $f(x)$ меньше –2, а наименьшее значения $g(x)$ равно –2, поэтому при $x>x_0$ выполняется неравенство

$f(x)<g(x)$. А значит из условия $f(x)\geq-2$ следует условие $g(x)\geq-2$. Поэтому длина левого отрезка, на котором выполняется неравенство $|f(x)|\leq 2$, не превосходит половины длины отрезка, на котором $|g(x)|\leq 2$, то есть двух. А правый отрезок, на котором $|g(x)|\leq 2$ имеет ту же длину, что и левый. Задача решена.

Утверждение этой задачи – простейший вариант теоремы Пойа[1] о многочленах. Подробнее об этой теореме содержатся в [8].

Упражнения

8. {О.1984} Числа a, b и c таковы, что $a>0$ и $b>a+c$. Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня.

9. {р.1997} Докажите, что при любых a, b и c уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет корень.

10. (Студенческая олимпиада Университета дружбы народов) Пусть $f(x)=x^2-bx+c$. Докажите, что если $|f(0)|>1$ и $f(1)f(-1)>0$, то на отрезке $[-1,1]$ многочлен $f(x)$ не имеет корней.

11. {р.2001} Функция $f(x)=ax^2-bx+c$ такова, что $f(1)\leq 2$, $f(-1)\geq 2$ и $f(-2)\leq 8$. Докажите, что $f(3)\leq 18$.

12. {П.1950} Какому условию должны удовлетворять коэффициенты квадратных трехчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d для того, чтобы между корнями каждого из них был заключен корень другого.

13. {Р.1990} Даны три различных положительных числа. Докажите, что их можно обозначить через a, b, c так, что будет выполняться неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

14. {М.1954} Известно, что модули всех корней уравнений $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ меньше 1. Докажите, что модули всех корней уравнения $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$ тоже меньше 1.

15. {М.1953} Даны уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

$$-ax^2+bx+c=0 \qquad (2)$$

Докажите, что если x_1 и x_2 (соответственно) – какие либо корни уравнений (1) и (2), то найдется такой корень x_3 уравнения $(ax^2/2)+bx+c=0$, что либо $x_1\leq x_3\leq x_2$, либо $x_1\geq x_3\geq x_2$.

[1] Пойа Дьёрдь (1887–1985) – американский математик.

16. {O.1988} Найдите соотношения между коэффициентами a, b, c, при которых система с одним неизвестным $ax^2-bx+c=0$, $bx^2-cx+a=0$, $cx^2-ax+b=0$ имеет решение.

17. {h2236.2011} На доске написаны девять приведенных квадратных трехчленов $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2,\ldots$, $x^2+a_9x+b_9$. известно, что последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_9$ и $b_1,b_2,\ldots,b_9$ – арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти многочленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней.

18. {p.1974} Определите значение параметра k, если известно, что неравенство $\left|\frac{x^2+kx+10}{x^2+3x+10}\right|\le 1$ выполняется для всех действительных x.

19. {p.2000} Дискриминант D приведенного квадратного трехчлена $f(x)$ положителен. Сколько корней может иметь уравнение $f(x)+f(x+\sqrt{D})=0$?

20. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два действительных корня, разность которых не меньше 1995. Докажите, что уравнение $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+1995)=0$ имеет два действительных корня.

21. {p.1998} Пусть $0<a<b<c<d$. Докажите, что уравнения $x^4+bx+c=0$ и $x^4+ax+d=0$ не имеют общих корней.

22. {E.1976} Известно, что числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $a\le b\le c\le d$, $a+d=b+c$. Докажите, что $ad\le bc$.

23. {P.1985} Докажите, что для любых чисел x и y, отличных от нуля, выполняется неравенство $x^4+y^4\le\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}$.

24. При каком наибольшем значении параметра a найдутся такие коэффициенты b и c, что неравенство $\left|ax^2+bx+c\right|\le 1$ выполняется для всех x из отрезка $[-1,1]$?

25. При каком наименьшем значении M существуют такие коэффициенты p и q, что неравенство $\left|x^2+px+q\right|\le M$ выполняется для всех x из отрезка $[-1,1]$?

26. {B.1973} Действительные числа a, b, c таковы, что для всех чисел x, удовлетворяющих условию $-1\le x\le 1$, выполняется неравенство $\left|ax^2+bx+c\right|\le 1$. Докажите, что при этих значениях x выполнено также неравенство $\left|cx^2+bx+a\right|\le 2$.

27. {Н.1914} Пусть при всех x, таких что $-1\le x\le 1$, выполняются неравенства $-1\le ax^2+bx+c\le 1$. Докажите, что при тех же x верны неравенства $-4\le 2ax+b\le 4$.

28. {П.1969} Найдите наименьшее действительное число M такое, что для каждого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего условию $\left|f(x)\right|\le 1$ при $0\le x\le 1$, выполнено неравенство $f'(0)\le M$.

29. {Е.1971} Значение квадратного трехчлена ax^2+bx+c по абсолютной величине не превосходят единицы, когда $|x|\le 1$. Среди всех таких трехчленов найдите трехчлен с наименьшим дискриминантом b^2-4ac.

4. Кубики

Кубиками называют графики кубических уравнений. Далее в основном будут использоваться графики кубических многочленов, имеющих три действительных корня. Графики таких многочленов изображены на рисунке 6.

Для решения следующих задач полезно знать, что коэффициенты p, q и r многочлена $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-px^2+qx-r$ определяются условиями

$$p=a+b+c,\ q=ab+ac+bc,\ r=abc$$

(это доказывается простым раскрытием скобок). Если $a<b<c$, то значения многочлена положительны на интервалах (a,b) и $(c,+\infty)$ и отрицательны на интервалах $(-\infty,a)$ и (b,c).

Задача 6. {h2051.2007} Докажите, что если числа a, b и c положительны и $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=abc$, то $a=b=c$.

Решение. Сказанное выше наводит на мысль рассмотреть многочлены $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ и $g(x)=(x-a-b+c)(x-a-c+b)(x-b-c+a)$, свободные члены которых фигурируют в условии задачи. Попробуем разобраться, как расположены их графики.

Отрицательным может быть не более одного из трех чисел $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Но их произведение положительно, поэтому все эти числа положительны.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a\le b\le c$. Тогда $a+b-c\le a+c-b\le b+c-a$. А, кроме того, $a+b-c\le a$ и $c\le b+c-a$.

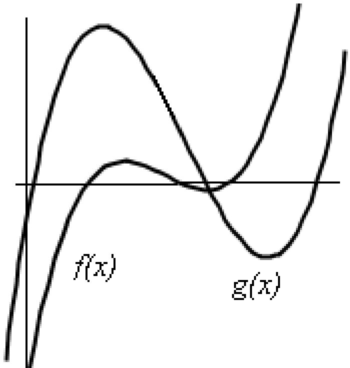

Рис. 6

На отрезке $[a+b-c, b+c-a]$ лежат все три корня многочлена $f(x)$, поэтому на этом отрезке он меняет знак (см. рис. 6). А поскольку на концах рассматриваемого отрезка многочлен $g(x)$ обращается в ноль, на этом отрезке меняет знак и разность $f(x)-g(x)$. Но тогда эта разность имеет на данном отрезке корень. По условию есть и второй корень $x=0$.

Но разность многочленов – линейная функция, так как суммы их корней одинаковы. Значит, она тождественно равна нулю, то есть многочлены совпадают. В частности совпадают и их множества корней, следовательно, $a=a+b-c$ и $c=b+c-a$, откуда $b=c$ и $a=b$.

Разумеется, приблизительная картинка, каковой является график, не может служить доказательством. Но «построить график» не означает просто «нарисовать картинку». Нужно еще доказать, что некоторые характерные, интересные в данном контексте точки, расположены так, а не иначе. Что и было сделано.

Задача 7. Про положительные числа a,b,c,x,y,z известно, что $a<b<c$, $a\le x\le y\le z\le c$ и $a+b+c\le x+y+z$. Докажите, что $abc\le xyz$ и

$$ab+bc+ac\le xy+yz+xz.$$

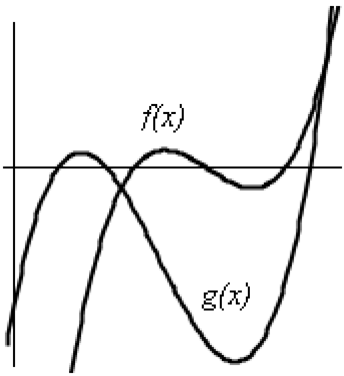

Рис. 7

Решение. Нарисуем графики многочленов $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и $g(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ (рис. 7). Очевидно $f(a)=0$, $g(a)\le 0$, $f(c)=0$, $g(c)\ge 0$, поэтому $g(a)-f(a)\le 0$ и $g(c)-f(c)\ge 0$. Следовательно, на отрезке $[a,c]$ разность этих многочленов $g(t)-f(t)$ имеет корень.

Если $a+b+c=x+y+z$, то эта разность – линейная функция и других корней нет. Тогда $g(0)-f(0)$ и $g(a)-f(a)$ имеют одинаковый знак, то есть разность $g(0)-f(0)\le 0$, что дает первое из доказываемых неравенств. Чтобы получить второе нужно заметить, что значения $g(t)–f(t)$ при больших t имеют тот же знак, что и $g(c)–f(c)$, т. е., неотрицательны, а потому коэффициент при t неотрицателен.

Если же $a+b+c<x+y+z$, то график разности $g(t)–f(t)$ – парабола «рогами вниз». Поэтому второй корень этой разности лежит на интервале $(c,+\infty)$. Тогда $g(0)–f(0)\le 0$, что дает неравенство $abc\le xyz$. Так как разность $g(t)–f(t)$ имеет два положительных корня, по теореме Виета коэффициент при t положителен, откуда следует второе неравенство.

Эти неравенства имеют много важных частных случаев. При $x = y = z = \dfrac{a+b+c}{3}$ получим неравенство Коши $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ и неравенство $3(ab+bc+ac) \le (a+b+c)^2$. При $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{a+c}{2}$, $z = \dfrac{b+c}{2}$ получим неравенство Чезаро $8abc\le(a+b)(a+c)(b+c)$ и т. д.

Один из выводов предыдущей задачи может быть существенно усилен. Соответствующий результат может быть сформулирован следующим образом.

Задача 8. Про положительные числа a,b,c,x,y,z известно, что $a<b<c$, $a\le x\le y\le z\le c$ и $a+b+c\le x+y+z$. Докажите, что

$$(x+y+z)^2abc\le(a+b+c)^2xyz.$$

Решение. Поскольку $a+b+c\le x+y+z$, это неравенство сильнее, чем доказанное в предыдущей задаче неравенство $abc\le xyz$. Но попробуем «подогнать» его под ту же картинку. Для этого перепишем доказываемое неравенство в виде $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{x+y+z}\right)^2 xyz$.

В правой части полученного неравенства стоит произведение пяти сомножителей. Чтобы «вероятность» попасть в знакомую ситуацию была побольше, разумно провести группировку следующим образом

$$abc \le x\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\cdot y\right)\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\cdot z\right).$$

Теперь вместо чисел x,y,z рассмотрим числа $X = x$, $Y = y\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$, $Z = z\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$. Покажем, что они удовлетворяют тем же условиям.

Прежде всего, нужно убедиться, что $Y \geq a$ (условие $Z \geq a$ тогда будет заведомо выполнено). Это неравенство переписывается в виде $ay+by+cy \geq ax+ay+az$ или $\frac{b}{a}+\frac{c}{a} \geq \frac{x}{y}+\frac{z}{y}$. Но $\frac{b}{a} \geq 1 \geq \frac{x}{y}$, а поскольку $c \geq z \geq y \geq a$, то $\frac{c}{a} \geq \frac{z}{y}$. Тем более $Z \geq Y \geq a$. Кроме того очевидно $X \geq a$, $X \leq c$ и $Y \leq Z \leq z \leq c$. Наконец,

$$X+Y+Z = x + y\frac{a+b+c}{x+y+z} + z\frac{a+b+c}{x+y+z} \geq$$

$$\geq x\frac{a+b+c}{x+y+z} + y\frac{a+b+c}{x+y+z} + z\frac{a+b+c}{x+y+z} = a+b+c.$$

Таким образом, числа a,b,c,X,Y,Z удовлетворяют всем условиям предыдущей задачи. Остается воспользоваться ее результатом.

Доказанный результат можно разными способами конкретизировать, получая при этом интересные результаты. Самый естественный вариант конкретизации – усреднение.

В качестве способа усреднения воспользуемся, например, средним квадратическим. Пусть заданы неотрицательные числа a, b и c. Рассмотрим их попарные средние $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $y=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$ и $z=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \leq b \leq c$. Тогда, очевидно $a \leq x \leq b$, а в силу неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = x$. Из этих и аналогичных неравенств немедленно следует, что числа a,b,c,x,y,z удовлетворяют условию предыдущей задачи. А тогда

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)^2 abc \leq$$

$$\leq (a+b+c)^2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},$$

или, после упрощения,

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2 abc \le$$

$$\le (a+b+c)^2\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{2}}.$$

Результат довольно симпатичный и, видимо, не простой.

А можно получать и более сложные циклические неравенства, взяв, например, $x=\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$, $y=\sqrt{\frac{b^2+2c^2}{3}}$ и $z=\sqrt{\frac{c^2+2a^2}{3}}$.

Или чуть менее очевидный пример. Пусть α, β и γ – углы остроугольного треугольника. Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha\le\beta\le\gamma$. Тогда в силу монотонности тангенса выполняются неравенства $\operatorname{tg}\alpha \le \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \operatorname{tg}\beta$. А в силу выпуклости той же функции $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2} \le \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Наконец

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому числа $a=\operatorname{tg}\alpha$, $b=\operatorname{tg}\beta$, $c=\operatorname{tg}\gamma$, $x=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, $y=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ и $z=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ удовлетворяют условию задачи 8. Отсюда следует неравенство

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \le (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Упражнения

30. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0. \end{cases}$$

31. Докажите, что если $x+y+z=0$, то $xy+yz+xz\le 0$.

32. {p.1998} Пусть числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $a+b+c>0$, $ab+ac+bc>0$, $abc>0$. Докажите, что $a>0$, $b>0$, $c>0$.

33. {И.1994} Положительные числа a, b и c удовлетворяют неравенствам $abc>1$ и $a+b+c<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Сколько среди них чисел, меньших единицы?

34. {Л.1965} Про положительные числа a,b,c,x,y,z известно, что $a<b<c$, $a\le x\le y\le z\le c$, $abc=xyz$, $a+b+c=x+y+z$. Докажите, что $a=x$, $b=y$ и $c=z$.

35. Про положительные числа a,b,c,x,y,z известно, что $a<b<c$, $a\le x\le y\le z\le c$, $abc=xyz$, $ab+bc+ac=xy+yz+xz$. Докажите, что $a=x$, $b=y$ и $c=z$.

36. {р.2001} Действительные числа x, y и z удовлетворяют равенству $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$. Докажите, что среди них есть два числа, в сумме составляющих 0.

37. {Л.1988} Числа x, y и z удовлетворяют условиям $xyz=1$ и $x+y+z=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Докажите, что одно из них равно 1.

38. {В.1970} Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

39. Числа x, y и z удовлетворяют равенству

$$x+y+z-2(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}-4xyz.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

40. {Л.1986} Дано

$$u_1=ax+by+cz,\quad v_1=ax+bz+cy,$$
$$u_2=ay+bz+cx,\quad v_2=az+by+cx,$$
$$u_3=az+bx+cy,\quad v_3=ay+bx+cz,$$

где a, b, c, x, y, z – вещественные числа. Известно, что $u_1u_2u_3=v_1v_2v_3$. Докажите, что перестановкой чисел в тройке (u_1,u_2,u_3) можно получить тройку (v_1,v_2,v_3).

41. Докажите, что для положительных чисел a, b, c и неотрицательных чисел x, y, z выполняется неравенство

$$(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)\ge(a+b+c)^3xyz.$$

42. {Р.1990} Пусть a, b, c неотрицательные числа, такие, что $a+b+c=1$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c)$.

43. {О.1994} Докажите неравенство

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

если

а) a, b и c – длины сторон некоторого треугольника;

б) a, b и c – произвольные положительные числа.

44. {W.2000} Докажите, что для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условию $abc=1$, выполняется неравенство

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

45. Рассмотрим многочлен $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, где $a<b<c$ – действительные числа. Пусть p и q – значения этого многочлена в точках локального максимума и локального минимума соответственно. Докажите, что $p+q>0$ тогда и только тогда, когда $b-a>c-b$.

46. {П. 1951} Выяснить, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять действительные числа a, b, c для того, чтобы уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имело три вещественных корня, образующих арифметическую прогрессию

47. {O.1999} Пусть действительные числа x, y и z удовлетворяют неравенству $x+y+z \geq \sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$. Докажите, что тогда

$$|x|+|y|+|z| = x+y+z.$$

48. {h7.1970} Пусть a,b,c – стороны треугольника. Докажите, что $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \geq 3$.

5. Мультипликативные аналоги

Идея предыдущего раздела часто работает немного подругому. При этом меняются местами ноль и бесконечность, операции сложения и умножения и знаки «больше» и «меньше». Приведем пример.

Задача 9. {h840б).1983} Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняется неравенство

$$a^3b+b^3c+c^3a \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

Решение. Слева стоит сумма трех чисел. Довольно естественно рассмотреть многочлен третьей степени, корнями которого эти числа являются. То же относится и к правой части. Рассмотрим многочлены $f(x)=(x-a^3b)(x-b^3c)(x-c^3a)$ и $g(x)=(x-a^2bc)(x-b^2ac)(x-c^2ab)$. В силу теоремы Виета нужно выяснить, как соотносятся коэффициен-

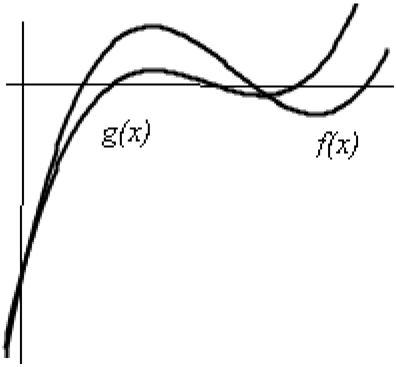

Рис. 8

ты при x^2 в этих многочленах. Очевидно произведение корней этих многочленов, то есть их свободные члены, совпадают. Поэтому графики многочленов пересекаются на оси ординат.

Кроме того, если, например, a – наименьшее из чисел a, b, c, то a^2bc – наименьшее слагаемое в правой части неравенства. Но при этом a^2bc больше, чем a^3b. По аналогичным причинам большее из слагаемых в правой части неравенства не превосходит максимального слагаемого из его левой части. Поэтому графики расположены так, как показано на рис. 8. В частности, на отрезке между большим и меньшим корнями многочлена $f(x)$ расположены все три корня многочлена $g(x)$. И потому на этом отрезке разность $g(x)–f(x)$ меняет знак и, следовательно, имеет корень.

Итак, два корня $g(x)–f(x)$ лежат левее большего из корней $f(x)$. Но рассматривая разность – квадратный трехчлен, и поэтому других корней нет, а график разности $g(x)–f(x)$ – парабола. Причем эта парабола расположена «рогами вверх», так как разность $g(x_0)–f(x_0)$ положительна, если x_0 – наибольший из корней многочлена $f(x)$. Значит старший коэффициент $a^3b+b^3c+c^3a–(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$ трехчлена $g(x)–f(x)$ положителен, что и требуется доказать.

Бросается в глаза аналогия этого решения с решением задачи 7. Эта аналогия позволяет получать из одного неравенства рассматриваемого типа, новое неравенство. Вот как это делается.

Запишем неравенство предыдущей задачи в виде

$$aaab+bbbc+ccca \geq aabc+bbac+ccab.$$

А теперь поменяем в этом неравенстве местами знаки «+» и «×», а также «≥» и «≤». Получим неравенство

$$(a+a+a+b)(b+b+b+c)(c+c+c+a) \leq (a+a+b+c)(b+b+a+c)(c+c+a+b)$$

или $(3a+b)(3b+c)(3c+a) \leq (2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)$.

Задача 10. Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняется неравенство

$$(3a+b)(3b+c)(3c+a) \leq (2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b).$$

А теперь просто скопируем решение предыдущей задачи, внеся в него изменения в соответствии с указанными выше правилами.

Решение. Справа стоит произведение трех чисел. Естественно рассмотреть многочлен третьей степени, корнями которого эти числа являются. То же относится и к правой части неравенства. Рассмотрим многочлены $f(x)=(x-(2a+b+c))(x-(2b+a+c))(x-(2c+a+b))$ и $g(x)=(x-(3a+b))(x-(3b+c))(x-(3c+a))$. В силу теоремы Виета нужно выяснить, как соотносятся свободные члены в этих многочленах. Очевидно сумма корней этих многочленов, то есть их коэффициенты при x^2, совпадают. Поэтому графики многочленов пересекаются не более одного раза[2].

Кроме того, если, например, a – наибольшее[3] из чисел a, b, c, то $2a+b+c$ – наибольший сомножитель в правой части неравенства. Но при этом $2a+b+c$ меньше, чем $3a+b$. По аналогичным причинам меньший из сомножителей в правой части неравенства не превосходит минимального сомножителя из его левой части. Поэтому графики расположены так, как показано на рис. 6. В частности, на отрезке между большим и меньшим корнями многочлена $g(x)$ расположены все три корня многочлена $f(x)$. И потому на этом отрезке разность $f(x)-g(x)$ меняет знак и, следовательно, имеет корень.

Итак, корень $f(x)-g(x)$ лежит правее меньшего из корней $g(x)$. Но рассматривая разность – линейная функция, и поэтому других корней нет, а график разности $f(x)-g(x)$ – прямая. Причем эта прямая имеет положительный наклон, так как разность $f(x_0)-g(x_0)$ отрицательна, если x_0 – наименьший из корней многочлена $g(x)$. Значит свободный член $(3a+b)(3b+c)(3c+a)-(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)$ Двучлена $f(x)-g(x)$ отрицателен, что и требуется доказать.

Раскрыв скобки в только что доказанном неравенстве, получим

$$a^3+b^3+c^3+2a^2c+2b^2a+2c^2b\geq a^2b+b^2c+c^2a+6abc.$$

В таком виде задача доказательства этого неравенства будет очень непростой.

С задачей 10 можно еще раз проделать то же преобразование. Очевидно, при этом снова получится задача 9. Такое свойство двух объектов (в данном случае двух задач) в математике принято назы-

---

[2] Здесь так и хочется написать «пересекаются на бесконечности».

[3] Раз уж мы поменяли знак «≥» на «≤», разумно «наименьшее» поменять на «наибольшее».

вать двойственностью. Часто наличие двойственности бывает очень полезным. Поэтому над найденным свойством стоит поразмышлять.

Иногда нашу идею исследования взаимного расположения графиков приходится применять несколько раз.

Задача 11. Докажите, что если a, b и c – длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{a+c-b}}+\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}\geq\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Решение. Имея даже небольшой опыт решения задач на доказательство неравенств, можно сказать, что данную задачу сильно усложняет наличие корней. Посмотрим, как эту трудность удается обойти.

Для определенности будем считать, что $a\leq b\leq c$. Рассмотрим многочлены $f(x)=\left(x-\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{a+c-b}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}\right)$ и $g(x)=\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$.

При сделанном предположении $\frac{1}{\sqrt{a}}$ – наибольший корень многочлена $g(x)$, а $\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}$ – наибольший корень многочлена $f(x)$. Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{a}}\leq\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}$ совсем не сложно, поскольку это неравенство можно просто возвести в квадрат. Аналогично, проверяется, что $\frac{1}{\sqrt{c}}\geq\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}$, т.е. корни многочлена $g(x)$ лежат между наибольшим и наименьшим из корней многочлена $f(x)$.

А тогда достаточно доказать, что $f(0)\leq g(0)$. Действительно, в таком случае разность $f(x)-g(x)$ будет один раз менять знак на отрезке $\left[0,\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}\right]$ и один раз – на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{b+c-a}},\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}\right]$. (см. рис. 9). Но так как эта разность – квадратный трехчлен, больше менять знак она не может. При $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ разность $f(x)-g(x)$ неполо-

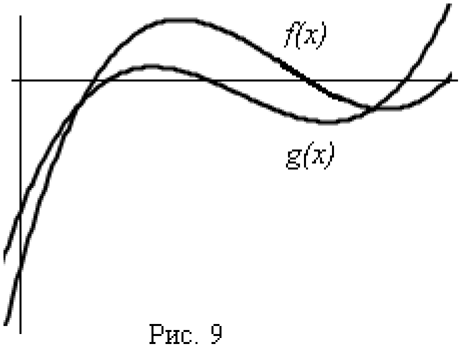

Рис. 9

жительна, значит, она будет неположительной и при очень больших значениях x. Следовательно, ее старший коэффициент будет положительным, что и нужно.

Неравенство $f(0)\le g(0)$ опять можно упростить, просто возведя его в квадрат. Получим неравенство $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, которое является частным случаем неравенства задачи 7 (проверьте!). Вот и все.

Упражнения

49. {p.2001} Даны действительные числа a, b, c, причем $a>b>c$. Докажите неравенство $a^2b+b^2c+c^2a>b^2a+a^2c+c^2b$.

50. Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $a^5+b^5+c^5\ge a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2$.

51. {O.1993} Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c таких, что $a>b>c>0$, выполняется неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

52. {E.1993} Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$.

53. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

54. {S.1996} Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство $\sqrt{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt{\frac{bc}{a^2}}\ge\frac{ab}{c^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{bc}{a^2}$.

55. {h762.1982} Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняются неравенства

$$a+b+c\le\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\le\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

56. Про положительные числа a,b,c,x,y,z известно, что $a<b<c$, $a\le x\le y\le z\le c$ и $abc\ge xyz$. Докажите, сто тогда справедливы неравенства $a+b+c\ge x+y+z$ и $ab+bc+ac\ge xy+yz+xz$.

57. Про положительные числа a,b,c,x,y,z известно, что $a<b<c$, $a\le x\le y\le z\le c$ и $ab+bc+ac\ge xy+yz+xz$. Докажите, что $a+b+c\ge x+y+z$.

6. Неравенства для сторон треугольника

Если числа a, b и c выражают длины сторон треугольника, то для них, разумеется, справедливы все неравенства, верные для любых положительных чисел. Но можно доказать и неравенства иного типа. Приведем пример

Задача 12. {W.1991, h1317.1991} Докажите для любого треугольника ABC неравенство $\frac{1}{4}<\frac{IA\cdot IB\cdot IC}{l_A\cdot l_B\cdot l_C}\le\frac{8}{27}$, где I – центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C – длины биссектрис треугольника ABC.

Решение. В задаче фигурируют произведения длин трех отрезков. В планиметрии такие произведения геометрического смысла не имеют. Поэтому преобразуем задачу в алгебраическую форму.

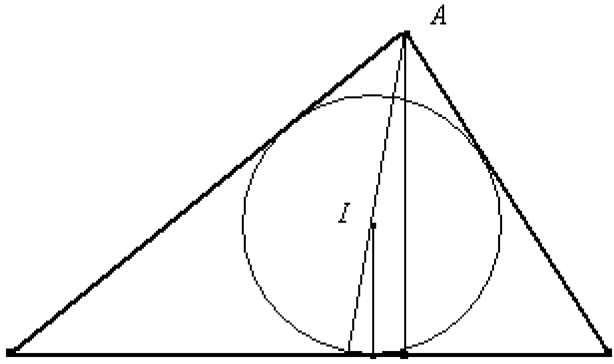

Рис. 10

Проведем биссектрису AL, высоту AH и опустим перпендикуляр IK на сторону BC (см. рис. 10). Из подобия треугольников LIK и LAH будем иметь $\frac{IA}{LA}=\frac{AH-IK}{AH}$.

Применяя выражения для площади треугольника через высоту и радиус вписанной окружности, получим $\frac{IA}{l_A}=\frac{b+c}{a+b+c}$ и аналогично

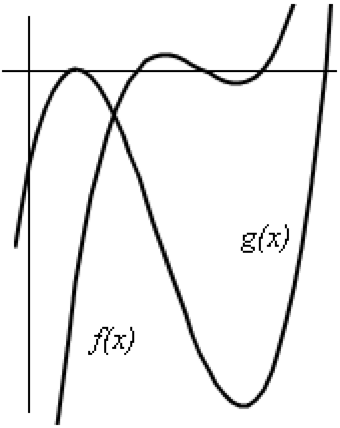

Рис. 11

$\frac{IB}{l_B} = \frac{a+c}{a+b+c}$ и $\frac{IC}{l_C} = \frac{a+b}{a+b+c}$. Поэтому доказываемое неравенство перепишется в виде $\frac{1}{4} < \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3} \le \frac{8}{27}$, где a, b и c – стороны треугольника.

Таким образом, нужно доказать, что

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

и

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3 < (a+b)(a+c)(b+c).$$

Первое неравенство – это неравенство Коши для трех чисел $\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}$, уже доказанное выше.

Докажем второе. Справа стоит произведение трех сомножителей. Чтобы попасть в знакомую ситуацию, нужно и слева организовать аналогичное произведение. А чтобы сумма сомножителей слева равнялась сумме сомножителей справа, неравенство нужно переписать так:

$$\left(\frac{1}{2}(a+b+c)\right)\left(\frac{1}{2}(a+b+c)\right)(a+b+c) < (a+b)(a+c)(b+c).$$

Рассмотрим многочлены $g(x)=(x-(a+b))(x-(a+c))(x-(b+c))$ и $f(x)=(x-p)^2(x-2p)$, где p – полупериметр треугольника. В силу неравенства треугольника их графики расположены так, как показано на рис. 11. Поэтому единственный корень линейной функции $f(x)-g(x)$ лежит на отрезке $[p,2p]$ и значение $f(0)-g(0)<0$, что и требуется.

Упражнения

58. {О.1991} Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то $\frac{1}{4} < \frac{ab+ac+bc}{(a+b+c)^2} \le \frac{1}{3}$.

59. Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

60. Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

61. Пусть a, b, c – стороны треугольника, $u=a+b-c$, $v=a+c-b$, $w=b+c-a$. Докажите неравенство $\dfrac{uvw}{uv+uw+vw} \le \dfrac{abc}{ab+ac+bc}$.

7. Рациональные функции

Иногда для доказательства неравенств удобно вводить в рассмотрение рациональные функции. Суть в том, что поиск корней таких функций принципиально сводится к решению обычных уравнений с многочленами в левой части. Поэтому число корней можно оценить с помощью той же простой теоремы о числе корней многочлена. А поскольку такая оценка зависит только от степени многочлена, соответствующие алгебраические преобразования можно и не проводить. Локализовать же корни рациональной функции часто бывает даже проще, чем в случае многочлена.

Задача 13. (Независимый московский университет, 2003 г.) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} < 2.$

Решение. Данная задача была предложена Несбитом (A.M. Nesbitt) еще в 1903 году, и часто называется его именем.

Воспользуемся вспомогательной рациональной функцией. Логика ее построения определяется следующими соображениями. Левая часть данного неравенства заметно упростится, если в знаменатель каждой из дробей добавить одно слагаемое, так, чтобы эти знаменатели стали одинаковыми. Чтобы сумма этих дробей стала равной правой части, нужно и в числители тоже что-то добавить. Остальное диктуется удобством построения графиков.

Итак, нарисуем график функции

$$f(x) = \frac{a+cx}{a+b+cx} + \frac{b+ax}{b+c+ax} + \frac{c+bx}{c+a+bx}.$$

Он получается «сложением» трех гипербол, соответствующих функциям

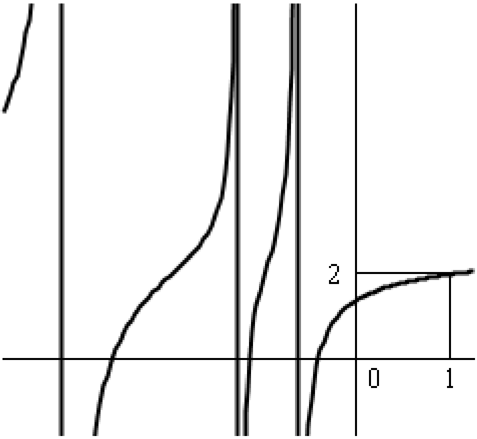

Рис. 12

$$f_1(x) = \frac{a+cx}{a+b+cx} =$$
$$= 1 - \frac{b}{a+b+cx}$$

и т.д., а потому выглядит так, как на рис. 12.

Функция $f(x)$ имеет три точки разрыва, лежащие на отрицательной половине оси абсцисс. Эти три точки делят ось абсцисс на два луча и два отрезка. На каждом из этих двух отрезков значения функции непрерывно меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому на каждом из этих отрезков уравнение $f(x)=2$ имеет корень. Еще один корень $x=1$ легко угадывается (функция специально строилась, чтобы это было так).

А других корней нет, потому что после умножения уравнения на общий знаменатель (от чего число корней не может уменьшиться), получится кубическое уравнение, которое не может иметь больше трех корней.

Значит, на интервале от самой правой точки разрыва до 1 значения функции меняются от $-\infty$ до 2, в частности $f(0)<2$, что и требуется доказать.

Эти рассуждения верны, если все три числа a, b и c различны. Если среди них есть совпадающие, то число отрезков будет меньше, но и степень уравнения, получающегося в результате умножения уравнения $f(x)=2$ на наименьший общий знаменатель, будет на столько же меньше (этот эффект совершенно общий, и потому может использоваться и при решении следующих задач). Поэтому основной вывод сохраняется.

Использованный метод не очень чувствителен к степени получающегося алгебраического уравнения[4]. Это демонстрирует, например, следующий результат.

---

[4] Этим методом можно доказать аналог правила Декарта [1] для дробно-рациональных функций. Поэтому здесь важнее число перемен знаков.

Задача 14. {h182.1973} Докажите, что если $a_1, a_2,\ldots,a_n$ – положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\ge\frac{n}{n-1}.$$

Решение. На сей раз рассмотрим две вспомогательные функции. Одна из них строится, исходя из тех же соображений, что и в решении предыдущей задачи. Построить вторую помогает следующее наблюдение. Доказываемое неравенство обращается в равенство, ели все числа $a_1, a_2,\ldots,a_n$ равны между собой. В этом случае обе построенные функции должны быть равны между собой.

Пусть

$$f(x)=\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n+a_1x}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n+a_2x}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_nx}$$

и $g(x)=\dfrac{n}{n-1+x}$. Нарисуем их графики (см. рис. 13). Все точки разрыва функции $f(x)$ лежат слева от начала координат. Они вырезают на оси абсцисс n–1 отрезок, на каждом из которых значения функции меняются от $-\infty$ до $+\infty$. На всех этих отрезках, кроме одного, функция $g(x)$ непрерывна. Значит, на этих n–2 отрезках имеется по одному корню уравнения $f(x)=g(x)$. Кроме того, по построению $f(1)=g(1)=1$, что дает еще один корень того же уравнения.

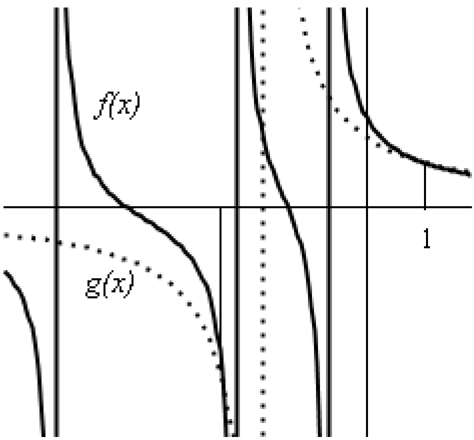

Рис. 13

После умножения уравнения $f(x)=g(x)$ на общий знаменатель, члены, содержащие x^n, сократятся. Это особенно хорошо видно, если записать функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{1}{\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_1}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}+x}+\ldots+\frac{1}{\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+x}.$$

Поэтому после умножения получится уравнение степени n–1, которое не может иметь более n–1 корней. Значит, других корней у уравнения $f(x)=g(x)$ нет.

А, кроме того, отсюда следует, что разрыв функции $g(x)$ действительно «портит» один из интервалов, на которых функция $f(x)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, точка разрыва функции $g(x)$ лежит левее самой правой точки разрыва функции $f(x)$.

Следовательно, разность $f(x)-g(x)$ сохраняет знак справа от последней точки разрыва функции $f(x)$. А поскольку вблизи этой точки она положительна, она будет положительной и при $x=1$. Отсюда немедленно следует нужное неравенство.

В данной задаче опять нужно отдельно разбираться со случаями, когда некоторые из данных чисел совпадают. В принципе, можно воспользоваться теми же соображениями, что и в решении предыдущей задачи. Но поскольку теперь нужно доказать нестрогое неравенство, можно воспользоваться общими соображениями непрерывности. Оформить соответствующие рассуждения можно, например, так.

Вместо чисел $a_1, a_2,\ldots,a_n$ рассмотрим функции $a_1(\varepsilon)=a_1+b_1\varepsilon$, $a_2(\varepsilon)=a_1+b_2\varepsilon,\ldots$ $\ldots,a_n(\varepsilon)=a_1+b_n\varepsilon$, где все числа b_i различны (коэффициенты a_i заданы условием задачи, а b_i можно взять равным i). Равенство $a_i(\varepsilon)=a_k(\varepsilon)$ представляет собой линейное уравнение относительно ε. Поэтому оно выполняется только при одном значении этой переменной. Значит, при всех положительных значений ε, кроме конечного числа, все числа $a_1(\varepsilon), a_2(\varepsilon),\ldots,a_n(\varepsilon)$ различны. Пусть δ – наименьшее из таких исключительных значений. Тогда для $\varepsilon<\delta$ все числа $a_1(\varepsilon), a_2(\varepsilon),\ldots,a_n(\varepsilon)$ будут различны и, следовательно, как уже доказано, будет выполняться неравенство

$$\frac{a_1(\varepsilon)}{a_2(\varepsilon)+a_3(\varepsilon)+\ldots+a_n(\varepsilon)}+\ldots+\frac{a_n(\varepsilon)}{a_1(\varepsilon)+a_2(\varepsilon)+\ldots+a_{n-1}(\varepsilon)}\geq\frac{n}{n-1}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to0$, получим нужное неравенство.

Последнее рассуждение совершенно универсально, поэтому в дальнейшем оно повторяться не будет.

На самом деле здесь работает общий методологический принцип. Приступая к решению сложной задачи, следует начинать с рассмотрения наиболее типичных случаев (в данном случае «типично» отсутствие среди чисел $a_1, a_2,\ldots,a_n$ совпадающих). А уже потом приниматься к исследованию вырожденных случаев, по возможности сводя их к уже рассмотренным.

Неравенство Несбита допускает, по крайней мере, еще одно естественное обобщение. В 1954 г. американский математик Гарольд Шапиро предложил в журнале American Mathematical Monthly следующую задачу: доказать, что для положительных чисел $a_1, a_2,\ldots,a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2}.$$

Задача оказалась неожиданно сложной и потому привлекла внимание многих математиков. О ее истории можно прочесть в [9–10]. Неравенство Несбита соответствует случаю n=3. Сам Шапиро умел доказывать лишь следующий результат, соответствующий n=4.

Задача 15. {h915.1985} Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$$

Решение. В «Задачнике «Кванта» эта задача помечена звездочкой как особенно сложная. Но если иметь в виду аналогию с неравенством Несита и доказывать последнее так, как это было сделано выше, то и решение данной задачи будет выглядеть естественным и несложным.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{a}{b+c+(d+a)x}+\frac{b}{c+d+(a+b)x}+$$

$$+\frac{c}{d+a+(b+c)x}+\frac{d}{a+b+(c+d)x}-\frac{2}{1+x}.$$

Две точки, в которых обращаются в ноль знаменатели дробей, входящих в это выражение со знаком «плюс» расположены слева от точки $x=-1$, а две – справа. Всего имеется пять точек разрыва функции, которые делят числовую прямую на пять интервалов. Поэтому график функции выглядит следующим образом.

На самом левом (бесконечном) интервале функция меняется от 0 до $-\infty$. Н следующем она меняется, вообще говоря, не монотонно, от $+\infty$ до $-\infty$. На этом интервале функция непременно обращается в ноль. Далее она убывает от $+\infty$, проходит через минимум, и опять уходит к $+\infty$. Потом возрастает от $-\infty$ до максимума и снова уходит к $-\infty$. Затем снова меняется от $+\infty$ до $-\infty$ (и здесь второй раз обращается в ноль. На самом правом интервале функция меняется от $+\infty$ до нуля, обращаясь в ноль при $x=1$.

Нарисовать этот график точно не представляется возможным, поскольку максимум на третьем интервале на два порядка больше значений функции при $x>0.5$. Поэтому, в зависимости от выбора масштаба, либо не виден график на третьем и четвертом интервале, либо при $x>0.5$ график сливается с осью абсцисс. Но это и не важно.

Важно, что удалось определить положение трех корней уравнения $f(x)=0$. Это уравнение сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени, поэтому где-то есть еще ровно один корень. Поскольку нас интересует знак функции при $x=0$, важно, чтобы этот корень не оказался на интервале между самой правой точкой разрыва и нулем.

Чтобы убедиться в этом, вычислим производную функции при $x=1$. Она равна $\dfrac{2bd+2ac-a^2-b^2-c^2-d^2}{2(a+b+c+d)^2}=\dfrac{-(b-d)^2-(a-c)^2}{2(a+b+c+d)^2}$.

Поскольку она отрицательна, в левой полуокрестности точки $x=1$ функция положительна. Но так как она положительна и справа от правой точки разрыва, на интервале от этой точки до точки $x=1$, на этом интервале она меняет знак четное число раз. Но там может быть не более одного корня, значит, знак совсем не меняется. А потому $f(0)>0$, что и требуется.

Вот пример посложнее.

Задача 16. Пусть a, b, c, d – положительные числа и $a+b+c+d=1$. Докажите неравенство

$$\frac{3}{1-a}+\frac{3}{1-b}+\frac{3}{1-c}+\frac{3}{1-d}\ge\frac{5}{1+a}+\frac{5}{1+b}+\frac{5}{1+c}+\frac{5}{1+d}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{4-x}{1-ax}+\frac{4-x}{1-bx}+\frac{4-x}{1-cx}+\frac{4-x}{1-dx}-\frac{4+x}{1+ax}-\frac{4+x}{1+bx}-\frac{4+x}{1+cx}-\frac{4+x}{1+dx}.$$

Она достаточно симметрична, и в ее терминах доказываемое неравенство выглядит совсем просто: $f(1) \ge f(0) = 0$.

После приведения формулы для $f(x)$ к общему знаменателю, в числителе окажется многочлен (относительно x), степень которого не превышает восьми. Но функция $f(x)$ нечетна, а знаменатель равен $(1-(ax)^2)(1-(bx)^2)(1-(cx)^2)(1-(dx)^2)$, то есть четен. Значит, в числителе стоит нечетный многочлен, и его степень не превосходит семи. А потому функция $f(x)$ имеет не более семи корней.

Воспользуемся тождеством $\dfrac{4-x}{1-ax} = \dfrac{x-4}{ax-1} = \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{\frac{1}{a}-4}{x-\frac{1}{a}}\right)$. Теперь понятно, что график функции $f(x)$ – это «сумма» нескольких гипербол, и выглядеть он может следующим образом (см. рис.14).

Точки разрыва функции $f(x)$ делят числовую прямую на девять интервалов, два бесконечных и семь ограниченных.

На самом правом бесконечном интервале функция меняется от $-\infty$ до 0 (эта часть графика «не помещается» на рисунке в реальном масштабе). Действительно, самое большое из чисел $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ больше четырех и в числителе соответствующей дроби стоит положительное число, а вблизи этой точки разрыва знак функции определяется знаком знаменателя этой дроби. С другой стороны, в числителе выражения для $f(x)$ стоит многочлен седьмой степени, а в знаменателе – восьмой.

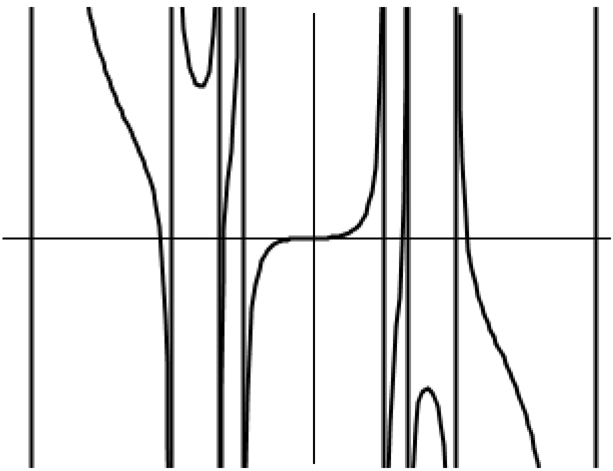

Рис. 14

Слева от этого бесконечного интервала может лежать несколько конечных интервалов, целиком лежащих правее точки x=4. На каждом из них функция $f(x)$ меняется от $+\infty$ до $-\infty$, а значит, имеет нечетное число корней.

Далее идет один интервал, содержащий точку x=4. На нем имеется четное число корней функции $f(x)$ (быть может, ноль).

Потом могут быть интервалы, целиком лежащие в интервале (0,4). На каждом из них функция $f(x)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а значит, имеет нечетное число корней.

Наконец, есть интервал, содержащий точку x=0. На нем функция меняется от $-\infty$ до $+\infty$ и, следовательно, тоже имеет нечетное число корней. Причем один из них очевиден: x=0.

Далее можно не описывать, поскольку функция $f(x)$ нечетна и ее график симметричен.

Итак, удалось установить, что на пяти из выделенных интервалов лежит, по крайней мере, один корень. Значит, установлено положение пяти корней из семи. Осталось разобраться еще с двумя.

Здесь помогает следующее соображение. Производная функции $\dfrac{4-x}{1-ax}-\dfrac{4+x}{1+ax}$ равна $\dfrac{a(4-x)-(1-ax)}{(1-ax)^2}+\dfrac{a(4+x)-(1+ax)}{(1+ax)^2}$ и при x=0 обращается в $8a$–2. Поэтому производная функции $f(x)$ при x=0 равна нулю. Значит, корень x=0 – кратный. А поскольку функция нечетна, кратность этого корня не меньше трех.

Таким образом, на среднем из выделенных интервалов лежит один трехкратный корень. Поэтому на нем функция $f(x)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ один раз меняя знак в точке x=0. Но так как этот интервал целиком содержит отрезок [0,1], выполняется неравенство $f(1)\geq f(0)$, что и требовалось доказать.

Полученный результат – весьма точный, поскольку в условиях задачи справедливы два неравенства $\dfrac{3}{1-a}+\dfrac{3}{1-b}+\dfrac{3}{1-c}+\dfrac{3}{1-d}\geq 4$ и $\dfrac{5}{1+a}+\dfrac{5}{1+b}+\dfrac{5}{1+c}+\dfrac{5}{1+d}\geq 4$ (см. упражнения 68 и 70), причем оба они обращаются в равенство, когда все переменные равны между собой. Но именно эта особенность приводит к наличию кратного корня. Поэтому нельзя сказать, что нам просто повезло!

Данная задача интересна следующим. При ее решении возникает соблазн использовать декомпозицию в духе работы [2], и действительно ее можно решить так. В данном случае чисто алгебраические идеи, связанные с мажоризацией, заменились геометрическими соображениями. И пока не совсем ясно в этой связи, является ли появление кратного корня случайностью.

Упражнения

62. {О.1983} Пусть числа a, b, c удовлетворяют условиям $a<b<c$. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ имеет ровно два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенствам $a< x_1<b< x_2<c$.

63. {О.1993} Пусть $x\le 1$, $y\le 1$, $z\le 1$, $x+y+z=0$. Докажите неравенство $\frac{x}{2-x}+\frac{y}{2-y}+\frac{z}{2-z}\ge 0$.

64. {О.1993} Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$.

65. Докажите, что для положительных чисел a_1, $a_2,\ldots,a_n$ выполняются неравенства $1<\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+a_1}<n-1$.

66. {р.1984} Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $\frac{a+b+c}{1+a+b+c}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

67. {Р.1988} Пусть $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ и $a+b+c\le 3$. Докажите неравенства $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3}{2}\le\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$.

68. (ГДР, 1967 г., Англия, 1976 г.) Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – положительные числа и $s=a_1+\ldots+a_n$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{s-a_n}\ge\frac{n}{n-1}.$$

69. (Балканиада, 1984) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,\ldots,a_n$, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n}\ge\frac{n}{2n-1}.$$

70. Пусть $a_1,\dots,a_n$ – положительные числа и $s=a_1+\dots+a_n$. Докажите неравенство $\dfrac{s}{s+a_1}+\dots+\dfrac{s}{s+a_n}\ge\dfrac{n^2}{n+1}$.

71. Пусть a, b, c, d – положительные числа. Докажите неравенство $\dfrac{12}{a+b+c+d}\le\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+d}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{b+d}+\dfrac{1}{c+d}$.

72. Пусть $a_1,\dots,a_n$ – положительные числа и $s=a_1+\dots+a_n$. Докажите неравенство $\dfrac{a_1^2}{s+a_1}+\dots+\dfrac{a_n^2}{s+a_n}\ge\dfrac{s}{n+1}$.

73. Пусть $a_1,\dots,a_n$ – положительные числа и $s=a_1+\dots+a_n$. Докажите неравенство $\dfrac{a_1^3}{s+a_1}+\dots+\dfrac{a_n^3}{s+a_n}\ge\dfrac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n+1}$.

74. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_n$ ($n>2$) – положительные числа, такие, что сумма любых $n-1$ из них больше оставшегося числа, а s – их сумма. Докажите неравенство $\dfrac{s}{s-2a_1}+\dots+\dfrac{s}{s-2a_n}\ge\dfrac{n}{n-2}$.

75. Пусть $a_1,a_2,\dots,a_n$ ($n>2$) – положительные числа, такие, что сумма любых $n-1$ из них больше оставшегося числа, а s – их сумма. Докажите неравенство $\dfrac{a_1^2}{s-2a_1}+\dots+\dfrac{a_n^2}{s-2a_n}\ge\dfrac{s}{n-2}$.

76. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\ge 1.$

77. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c и d выполняется неравенство

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\ge\frac{2}{3}.$$

78. Пусть $0\le a_1,\dots,a_n<1$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\dots+\frac{a_n}{1-a_n}\ge\frac{n(a_1+\dots+a_n)}{n-(a_1+\dots+a_n)}.$$

79. (Азиатско-тихоокеанская олимпиада, 1991) Предположим, $a_1,a_2,\dots,a_n$, $b_1,b_2,\dots,b_n$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $a_1+a_2+\dots+a_n=b_1+b_2+\dots+b_n$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\ge\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}.$$

80. {Л.1969} Сумма положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ равна 1. Докажите, что $\sum\limits_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\le\frac{n-1}{4}$.

81. {Л.1993} Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k $(k=1,2,\ldots,n)$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\le\frac{AB}{A+B}$, где $A=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $B=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$.

82. {Л.1990} Числа a, b и c лежат на отрезке [0,1]. Докажите, что

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\le 2.$$

83. {О.1982} Пусть числа x и y различны и

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy}.$$

Докажите, что $xy=1$.

8. Монотонность

Хорошо известно, что если функция $f(x)$ строго монотонна (возрастает или убывает) на некотором интервале, то при любом значении c уравнение $f(x)=c$ имеет на этом интервале не более одного корня. Обратное, вообще говоря, неверно. Для примера можно рассмотреть функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x \text{ рационально,}\\ -x \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

На любом сколь угодно малом интервале найдутся две рациональные точки $x<y$ и две иррациональные точки $u<v$. Тогда $f(x)<f(y)$, но $f(u)>f(v)$.

Но если рассматриваемая функция непрерывна, то и обратное утверждение тоже верно. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма. Функция $f(x)$ непрерывна на интервале I (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом) и принимает каждое свое значение не более одного раза. Тогда эта функция строго монотонна.

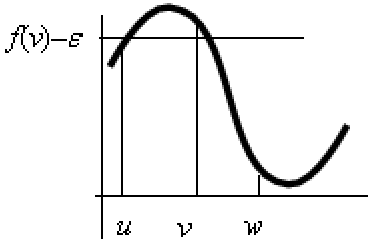

Рис. 15

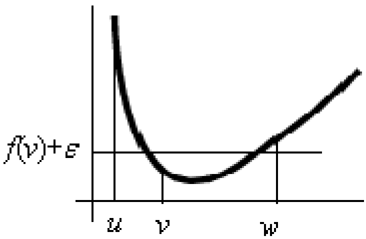

Рис. 16

Доказательство. Допустим противное. Так как функция не является возрастающей, существуют такие числа x_1 и x_2, что такие, что $x_1<x_2$ и $f(x_1)<f(x_2)$, а так как она не является убывающей, существуют числа x_3 и x_4 для которых $x_3<x_4$ и $f(x_3)>f(x_4)$. Пусть y – наименьшее из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, а z – наибольшее и пусть a – наименьшее из чисел $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, а b – наибольшее.

Докажем, что из четырех чисел x_1, x_2, x_3, x_4 можно выбрать три числа u, v и w таким образом, что $u<v<w$ и либо $f(u)<f(v)>f(w)$, либо $f(u)>f(v)<f(w)$.

Если наибольшее значение a достигается в точке t, отличной от y и z, то тройка y, t, z – искомая.

Остается рассмотреть случаи, когда $f(y)=a$, либо $f(z)=a$. Рассмотрим первый из них (второй рассматривается аналогично). В силу условий $x_1<x_2$ и $x_3<x_4$ имеем $y\neq x_2$ и $y\neq x_4$. А так как значение $f(y)$ максимально, а $f(x_1)<f(x_2)$, то $y\neq x_1$. Значит $y=x_3$. Тогда тройка x_3, x_1, x_2 – искомая.

Но если $u<v<w$ и $f(u)<f(v)>f(w)$, то при достаточно малом ε, значение $f(v)-\varepsilon$ принимается в двух точках: одной лежащей на интервале (u,v), а другой – на интервале (v,w) (см. рис. 15). Но это противоречит условию. Аналогично получается противоречие и в случае $u<v<w$ и $f(u)>f(v)<f(w)$ (см. рис. 16).

Полученное противоречие доказывает лемму.

Приведем примеры использования этой леммы.

Задача 17. {О.1983} Какое число больше

$$\frac{23^{1981}+1}{23^{1982}+1} \text{ или } \frac{23^{1982}+1}{23^{1983}+1}?$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{23^x+1}{23\cdot 23^x+1}$. Очевидно, она непрерывна. При любом значении c уравнение $f(x)=c$ эквивалентно уравнению $(1–23c)\cdot 23^x=c–1$, которое не может иметь более одного решения. Значит, в силу леммы функция монотонна.

Для того, чтобы выяснить, убывает она или возрастает, можно использовать удобные значения аргумента. Так как $f(0)=\dfrac{1}{12}>\dfrac{12}{265}=f(1)$, то и $f(1981)>f(1982)$.

Задача 18. Пусть a – положительное число. Докажите, что функция $f(x)=\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{-x}$ убывает при $x>a$.

Решение. На указанном интервале функция непрерывна. Преобразуем уравнение $f(x)=c$ к виду $1-\dfrac{a}{x}=c^{-\frac{1}{x}}$ и введем новую переменную $y=-\dfrac{1}{x}$. Получим $1+ay=c^y$. В Силу выпуклости функции c^y, данное уравнение имеет не более двух решений, причем корень $y=0$ не принадлежит интересующему нас интервалу. Поэтому и исходное уравнение имеет не более одного положительного корня. В силу леммы данная функция монотонна.

Для завершения решения достаточно проверить, например, что $f(2a)>f(3a)$, что уже не сложно.

Упражнения

84. {p.1972} Докажите, что функция $y=\sqrt{1+x^2}-x$ монотонно убывает на всей числовой прямой.

85. {p.1969} Пусть x – положительное число, отличное от 1. Какое из чисел больше $\log_x(x+1)$ или $\log_{x+1}(x+2)$?

86. Докажите неравенство $\dfrac{a^p-b^p}{a^p+b^p}>\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, где $a>b>0$, $p>n$.

87. Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$ монотонна.

88. Докажите, что если n – положительное число, то функция $F(x)=\dfrac{x^n \ln x}{x^n-1}$ возрастает при $x>1$.

89. Докажите, что функция $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ возрастает при положительных x.

90. Докажите, что функция $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ убывает при положительных x.

9. Указания

1. Выберем наибольшее значение i, для которого $f(c_i)<0$. Тогда $f(c_{i+1})\geq 0$ Поскольку $\alpha_i c_i+\beta_i<0$, а $\alpha_i c_{i+1}+\beta_{i+1}\geq 0$, выполняется неравенство $\alpha_i\neq 0$, а потому уравнение $\alpha_i x+\beta_i=0$ имеет корень $y=\dfrac{-\beta_i}{\alpha_i}$. Из условия $\alpha_i c_i+\beta_i<0$ следует, что $y>c_i\geq a$, а из условия $\alpha_i c_{i+1}+\beta_{i+1}\geq 0$ следует $y\leq c_{i+1}\leq b$.

2. Утверждение данной задачи – простейший частный случай знаменитой теоремы Брауэра[5] о неподвижной точке. В данном, одномерном, случае она следует из теоремы о промежуточном значении. Действительно, если $f(0)=0$ или $f(1)=1$, то все очевидно. В противном случае функция $g(x)=f(x)-x$ непрерывна и меняет знак на отрезке $[0,1]$, а потому имеет корень y, что и требуется доказать.

3. Отметим точки, в которых графики данных уравнений пересекают ось ординат. Пусть эти точки различны. Рассмотрим случай, когда графики пересекаются справа от оси ординат (противоположный случай рассматривается аналогично). Тогда наклон прямой, проходящей через среднюю точку, меньше, чем у прямой, проходящей через нижнюю точку, и больше, чем у третьей прямой. Но такого быть не может. Значит, по крайней мере, два из трех чисел равны и, следовательно, две из трех прямых параллельны. Но тогда они должны совпадать, а значит, все три числа равны.

---

[5] Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр (1881–1966) –голландский математик и философ. О теореме Брауэра см. [6,7].

4. Будем отмечать на оси абсцисс расстояние от точки на первой дороге до A, а на оси ординат – расстояние от A до точки на второй дороге (расстояния меряются по дорогам). Положению мотоциклов в какой-то момент времени соответствует точка на этой плоскости, а все положения мотоциклистов образуют непрерывную кривую, соединяющую точку (0,0) с точкой (s,S) (s и S – длины дорог). А положения возов образуют кривую, соединяющие точки $(0,S)$ и $(s,0)$. Обе кривые лежат в прямоугольнике с вершинами (0,0), $(0,S)$, $(s,0)$ и (s,S). Поэтому очевидно, что они пересекаются. Точке пересечения соответствуют положения возов, когда они сталкиваются.

В данной задаче рассмотренные кривые не обязаны быть графиками функций. Поэтому для строгого обоснования этого решения не достаточно теоремы о промежуточном значении. Требуется обращение к более сложной теореме Жордана[6] (о ней можно прочесть в [6,7]).

5. При решении этой задачи теорема о промежуточном значении используется два раза. Прежде всего, заметим, что найдется момент времени, когда кончики клювов гусей будут находиться на прямой, параллельной одной из сторон квадрата. В этот момент расстояние между гусями менее 110 м. А поскольку в начальный и конечный моменты времени это расстояние больше 110 м., можно утверждать, что найдется даже два момента времени, удовлетворяющих условиям задачи.

6. Будем считать, что торт – это ограниченное множество, расстояние между любыми двумя точками которого не превосходит M. Фиксируем некоторую прямую l, и рассмотрим прямую m, перпендикулярную l и лежащую от одной из точек торта на расстоянии большем M. Тогда весь торт лежит по одну сторону от m. Будем сдвигать эту прямую параллельно самой себе в сторону торта. Сдвинув ее достаточно далеко, мы добьемся того, что весь торт будет лежать по другую сторону от прямой. Значит, разность количества бисквита, лежащего слева и количества бисквита лежащего справа от прямой поменяет знак. А тогда найдется такое положение прямой m, при котором количество бисквита будет поделено поровну.

Теперь будем поворачивать прямую l, в каждый момент фиксируя положение прямой m так, чтобы она делила количество биск-

[6] Мари Энмон Камиль Жордан (1838–1922) – французский математик.

вита пополам. В любой момент времени будем рассматривать разность между количеством крема, лежащего слева и справа от прямой m. При повороте на 180 градусов эта разность поменяет знак. А значит, найдется момент времени, когда эта разность будет равна нулю. Соответствующее положение прямой m – искомое.

Разумеется, нужно доказывать, что обе рассмотренные в решении функции непрерывны. Сделайте это. Этот несложное, но очень полезное упражнение.

7. Фиксируем прямую l и через все вершины M проведем прямые $m_1, m_2, \ldots, m_n$, перпендикулярные l. Отметим точки пересечения $p_1, p_2, \ldots, p_n$ этих прямых с l и выберем p_i и p_j так чтобы остальные точки лежали между ними. Тогда весь многоугольник M будет лежать в полосе, ограниченной прямыми m_i и m_j, и на каждой из этих прямых будет лежать вершина M. Аналогичным образом строится полоса, ограниченная прямыми параллельными l, содержащая M и имеющая вершины M на ограничивающих прямых. Пересечение этих полос даст прямоугольник, содержащий M, на всех сторонах которого лежат вершины данного многоугольника. Теперь будем поворачивать прямую l, следя за разностью длин сторон получающегося прямоугольника. При повороте на 180 градусов эта разность меняет знак, значит, в какой-то момент времени становится равной нулю. Соответствующий прямоугольник – искомый.

Для доказательства непрерывности рассматриваемой функции полезно иметь в виду следующее: всегда можно считать, что пара вершин, лежащих на граничных прямых полосы, остается неизменной.

8. График многочлена $f(x)=ax^2+bx+c$ представляет собой параболу ветвями вверх. По условию $f(-1)<0$, значит, на каждом из интервалов $(-\infty,-1)$ и $(-1,+\infty)$ имеется корень.

9. Пусть $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$. Если, например, $a=b$, то это – корень. Если же $a<b<c$, то $f(a)>0$, $f(b)<0$ $f(c)>0$, значит, на каждом из интервалов (a,b) и (b,c) имеется корень.

10. Рассмотрим несколько случаев. Пусть $f(1)<0$ и $f(-1)<0$. График многочлена $f(x)$ – парабола ветвями вверх, поэтому наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$ достигается в одном из его концов, то есть отрицательно. Но тогда значение $f(x)$ отрицательно при любом x, то есть, корней нет.

Если $f(1)>0$, $f(-1)>0$ и $f(0)<-1$, то рассмотрим графики многочленов $f(x)$ и $g(x)=(x-1)(x+1)$. По условию $f(-1)>g(-1)$, $f(0)<g(0)$ и $f(1)>g(1)$. Поэтому на каждом из интервалов $(-1,0)$ и $(0,1)$ графики пересекаются. Но разность $f(x)-g(x)$ – многочлен первой степени, и он не может иметь двух корней, то есть такой случай не возможен.

Остается случай $f(1)>0$, $f(-1)>0$ и $f(0)>1$. Рассмотрим графики многочленов $f(x)$ и $h(x)=(x-1)^2$ на отрезке $[0,1]$. По условию $f(0)>g(0)$ и $f(1)>g(1)$, поэтому они должны пересекаться четное число раз на этом отрезке. Но разность этих многочленов – линейная функция, значит, более одного раза графики пересекаться не могут. Следовательно, они не пересекаются вовсе, и потому для любого $x\in[0,1]$ выполняются неравенства $f(x)>h(x)\geq 0$, и поэтому на отрезке $[0,1]$ $f(x)$ корней не имеет. Аналогично показывается, что у него нет корней и на отрезке $[-1,0]$.

Все случаи рассмотрены и задача решена.

11. Через точки с координатами $(-2,8)$, $(-1, 2)$ и $(1,2)$ проходит график единственного квадратного трехчлена $g(x)=px^2+qx+r$. Его коэффициенты можно найти, решив систему линейных уравнений $g(-2)=8$, $g(-1)=2$, $g(1)=2$, или $4p-2q+r=8$, $p-q+r=2$, $p+q+r=2$. Решая ее, находим, что $g(x)=2x^2$. Нарисуем графики многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Их разность – квадратичная функция. Если все данные в условии задачи неравенства реализуются как строгие, то она меняет знак на каждом из отрезков $[-2,-1]$ и $[-1,1]$. Значит, она положительна вне отрезка $[-2,1]$ и, в частности, при $x=3$. Вырожденные случаи разберите самостоятельно.

12. Точка пересечения графиков многочленов должна лежать ниже оси абсцисс. Найти ее можно, решив линейное уравнение $ax+b=cx+d$. Остается найти значение одного из многочленов в найденной точке. Получим условие $(b-d)^2+a(c-a)(b-d)+b(c-a)^2<0$.

13. Нарисуем графики многочленов $f(x)=\left(x-\dfrac{a}{c}\right)\left(x-\dfrac{c}{a}\right)$ и $g(x)=\left(x-\dfrac{a}{b}\right)\left(x-\dfrac{b}{c}\right)=x^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\right)x+\dfrac{a}{c}$. Нужно, чтобы при больших значениях x график $f(x)$ лежал выше графика $g(x)$. Но поскольку точка пересечения их графиков определяется сложными формулами, определить взаимное расположение графиков непосредственно не-

удобно. Поэтому рассмотрим вспомогательный многочлен $h(x)=\left(x-\frac{a}{c}\right)(x-1)$ точки пересечения графика которого с графиками $f(x)$ и $g(x)$ найти легко. Многочлены $f(x)$ и $h(x)$ имеют общий корень, а если $a>c$, меньший корень $f(x)$ лежит слева от обоих корней $h(x)$. Поэтому при больших x график $f(x)$ лежит выше. Графики $g(x)$ и $h(x)$ пересекаются на оси ординат, а если $b>a$ больший корень $g(x)$ больше обоих корней $h(x)$. Поэтому при больших x выше лежит график $h(x)$. Сопоставляя эти выводы, получим нужный результат.

14. График третьего уравнения лежит между графиками первых двух. А при $|x|>1$ графики многочленов x^2+ax+b и x^2+cx+d лежат выше оси абсцисс. Значит, и третий многочлен при этих значениях x положителен.

15. Графики всех трех многочленов *касаются* в точке $x=0$, а при больших x очевидно, что третий лежит между первыми двумя.

16. Допустим сначала, что среди чисел a, b, c нет равных. Нарисуем графики левых частей всех трех уравнений. Они пересекаются в точке $x=-1$. Если -1 – корень этих трехчленов, то $a+b+c=0$, и при таком соотношении параметров условие задачи выполняется. В противном случае все три графика имеют еще одну общую точку, и один из них лежит между двумя другими на всей числовой прямой. Но этого не может быть, так как при $x=0$ и при $x\to\infty$ посредине лежат разные графики. Если среди чисел a, b, c ровно два разных, то разность двух из рассматриваемых квадратных трехчленов – линейная функция, и -1 – единственная точка пересечения графиков этих трехчленов, и потому $a+b+c=0$. Случай $a=b=c$ тривиален.

17. Заметим, что сумма многочленов имеет столько же корней, сколько их среднее арифметическое. А среднее арифметическое данных трехчленов – это многочлен $x^2+a_5x+b_5$. Пусть Δ – разность прогрессии $a_1,a_2,\ldots,a_9$, а δ – разность прогрессии $b_1,b_2,\ldots,b_9$. Тогда графики всех данных трехчленов пересекаются в точке A с абсциссой $-\frac{\delta}{\Delta}$, и других точек попарного пересечения этих графиков нет. Поэтому порядок точек пересечения этих графиков с вертикальной прямой такой же, как порядок точек пересечения графиков с осью ординат, если точка не A попадает в полосу, ограниченную данной прямой и осью ординат. А если точка A лежит между этой прямой и

осью ординат, то порядки расположения точек пересечения графиков с этими двумя прямыми противоположны. Но точка пересечения графика многочлена $x^2+a_5x+b_5$ с осью ординат – пятая снизу. Поэтому в любом случае точка пересечения графика этого многочлена с вертикальной прямой будет пятой снизу. Проведем эту вертикальную прямую через точку минимума многочлена $x^2+a_5x+b_5$. Тогда, по крайней мере, пять точек пересечения графиков многочленов с этой прямой будут лежать ниже оси абсцисс или на ней. Следовательно, эти многочлены будут иметь корни. Поэтому число многочленов, не имеющих корней, не может превышать четырех. Взяв $a_5=0$, $b_5=5$, $\Delta=1$ и $\delta=0$ получим пример, когда число таких многочленов рано четырем.

18. Из условия следует, что график многочлена $x^2+kx+10$ всюду лежит не выше графика многочлена $x^2+3x+10$. Но если $k\neq 3$, эти графики пересекаются в точке $x=0$ «под ненулевым углом».

19. Дискриминант квадратного трехчлена равен квадрату разности его корней. Это важное свойство можно принять за определение дискриминанта. Нарисуем графики многочленов $f(x)$ и $f(x+\sqrt{D})$. Они имеют общий корень. Получившаяся картинка симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через этот корень. Значит и график суммы многочленов симметричен относительно этой прямой, то есть вершина параболы лежит именно на этой прямой. Следовательно, общий корень многочленов $f(x)$ и $f(x+\sqrt{D})$ является единственным корнем их суммы.

20. Пусть старший коэффициент $f(x)$ положителен (противоположный случай рассматривается аналогично). Если x_0 – меньший корень многочлена $f(x)$, то многочлены $f(x+1),\ldots,f(x+1995)$ отрицательны при $x=x_0$. А если x_1 – больший корень многочлена $f(x)$, то многочлены $f(x+1),\ldots,f(x+1995)$ положительны при $x=x_1$. На отрезке $[x_0,x_1]$ функция $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+1995)$ меняет знак, а значит, имеет корень. Поскольку уравнение квадратное, из существования одного корня следует существование второго.

21. В силу положительности коэффициентов, многочлены x^4+bx+c и x^4+ax+d не имеют положительных корней. А поскольку их разность – линейная функция, их графики пересекаются в одной точке. Так как разность отрицательна при $x=0$ и положительна при $x\to+\infty$, эта точка пересечения лежит правее оси ординат.

22. Рассмотрим многочлены $f(x)=(x-a)(x-d)$ и $g(x)=(x-b)(x-c)$. По условию их разность – константа, поэтому графики либо совпадают, либо не пересекаются. В первом случае все очевидно. Во втором, график $g(x)$ лежит выше графика $f(x)$, так как $f(d)=0<g(d)$. Значит, $f(0)<g(0)$, что и требовалось доказать.

23. Не ограничивая общности, можно считать, что $x^2 \le y^2$. Тогда $\frac{x^6}{y^2} \le x^4 \le y^4 \le \frac{y^6}{x^2}$. Рассмотрим квадратные трехчлены $f(t)=(t-x^4)(t-y^4)$ и $g(t)=\left(t-\frac{x^6}{y^2}\right)\left(t-\frac{y^6}{x^2}\right)$. Их графики пересекаются в единственной точке $t=0$. Поскольку разность $f(t)-g(t)$ положительна при $t=\frac{x^6}{y^2}$, она положительна и при больших t, значит, старший коэффициент разности $f(t)-g(t)$ положителен, что и дает нужное неравенство.

24. При решении этой задачи помогают те же физические соображения, что и при решении задачи 3, только графики стоит рисовать так, чтобы ось ординат была направлена вниз, и позаботиться о том, чтобы ось параболы была вертикальна, например, прикрепив к ней гироскоп. Формальное решение выглядит так. Нарисуем графики квадратных трехчленов $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=2x^2-1$. Тогда по условию $f(-1)\le g(-1)$, $f(0)\ge g(0)$, $f(1)\le g(1)$, а потому разность $f(x)-g(x)$ имеет два корня на отрезке $[-1,1]$ и, следовательно, не положительна при больших значениях x. А потому $a\le 2$.

25. Это – другая формулировка предыдущее задачи. Ответ дают $M=\frac{1}{2}$ и многочлен $x^2-\frac{1}{2}$. Для доказательства надо рассмотреть график этого многочлена и произвольного многочлена $f(x)=x^2+px+q$, удовлетворяющего условию. Они пересекаются в двух точках, а разность многочленов – линейная функция. Значит, многочлены совпадают.

26. Графики многочленов ax^2+bx+c и $2x^2-1$ дважды пересекаются на отрезке $[-1,1]$. Значит при $|x|\ge 1$ выполняется неравенство $ax^2+bx+c\le 2x^2-1$ или $a+b\cdot\frac{1}{x}+c\cdot\frac{1}{x^2}\le 2-\frac{1}{x^2}$. отсюда заменой пере-

менной x на $\frac{1}{x}$ получим, что при $|x| \le 1$ выполняется неравенство $a+bx+cx^2 \le 2-x^2 \le 2$. Случай $x=0$ нужно рассмотреть отдельно, но это просто (а можно воспользоваться соображениями непрерывности). Неравенство $a+bx+cx^2 \ge -2$ доказывается аналогично.

27. Рассмотрим графики трехчленов $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=2x^2-1$. Они дважды пересекаются на отрезке $[-1,1]$, поэтому оба корня их разности, а значит, и вершина соответствующей параболы лежат на этом отрезке. Поэтому при $x=-1$ производная разности неотрицательна, а при $x=1$ – неположительна. Отсюда следуют неравенства $-2a+b \ge -4$ и $2a+b \le 4$. Аналогично, рассматривая многочлены $f(x)$ и $h(x)=-2x^2+1$, получим неравенства $2a+b \ge -4$ и $-2a+b \le 4$. Функция $2ax+b$ отображает отрезок $[-1,1]$ на некоторый другой отрезок. Но как установлено, концы последнего принадлежат $[-4,4]$, а значит и он весь принадлежит $[-4,4]$.

28. Эта задача может быть сведена к предыдущей заменой переменной x на $2x-1$. Вместо многочлена $2x^2-1$ придется рассмотреть многочлен $2(2x-1)^2-1$. Искомое значение константы $M=8$.

29. Не ограничивая общности можно считать, что $a>0$ (в противном случае можно поменять многочлен $f(x)$ на $-f(x)$). Тогда при фиксированном старшем коэффициенте дискриминант тем меньше, чем выше расположена вершина параболы, являющейся графиком многочлена. Пусть многочлен $f(x)=ax^2+bx+c$ удовлетворяет условию задачи. Тогда условию удовлетворяет и многочлен $f(-x)=ax^2-bx+c$, так как его график симметричен графику исходного многочлена относительно оси ординат. График их полусуммы $g(x)=ax^2+c$ лежит между графиками $f(x)$ и $f(-x)$, а потому тоже удовлетворяет условию. Но в силу симметрии вершина графика многочлена $g(x)$ совпадает с точкой пересечения графиков $f(x)$ и $f(-x)$, то есть лежит выше их вершин. Следовательно, дискриминант $-4ac$ многочлена $g(x)$ не превосходит дискриминанта $f(x)$. Условие $g(1) \le 1$ дает $a+c \le 1$, откуда с помощью неравенства Коши получим $-4ac \ge -1$. Минимум достигается для многочлена $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

30. Из второго уравнения системы следует, что $xy+yz+xz=0$ и $xyz \ne 0$. Пусть x, y, z – решение этой системы. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. Он имеет вид $f(t)=t^3-xyz$, а потому имеет только

один корень (нарисуйте график!). Полученное противоречие доказывает, что данная система решений не имеет.

31. В противном случае многочлен $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+bt+c$, у которого $b>0$ не может иметь трех корней, так как он задает монотонную функцию.

32. Рассмотрим многочлен $f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)$. Так как по условию $f(0)>0$, начало координат лежит либо справа от всех тех корней, либо между двумя меньшими корнями. Но в последнем случае графики многочленов $f(x)$ и x^3 пересекаются справа от оси ординат, то есть многочлен $f(x)-x^3$ с положительными коэффициентами имеет положительный корень – противоречие. Значит, все корни отрицательны, что и требуется доказать.

33. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$. По условию

$$f(1)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ac)-abc>1-(a+b+c)+(a+b+c)abc-abc=$$
$$=(1-(a+b+c))(1-abc).$$

Произведение abc больше единицы, значит, вторая скобка отрицательна. Кроме того, отрицательна и первая. В самом деле, если произведение больше единицы, то, по крайней мере, одно из чисел больше 1, а значит и сумма $a+b+c>1$. Отсюда получаем неравенство $f(1)>0$. Следовательно, (нарисуйте график) либо все три числа меньше 1, либо только одно из них. Первый случай невозможен, так как $abc>1$. Остается второй.

34. Рассмотрим кубические многочлены $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ и $g(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$. По условию $f(a)\leq 0$, $g(a)=0$, $f(c)\geq 0$, $g(c)=0$. Поэтому $f(a)-g(a)\leq 0$ и $f(c)-g(c)\geq 0$. По теореме о промежуточном значении на интервале $[a,c]$ многочлен $f(t)-g(t)$ имеет корень. Кроме того, по условию 0 – тоже корень этого многочлена. Но в силу равенства $a+b+c=x+y+z$ этот многочлен имеет первую степень, а потому он тождественно равен нулю. В частности, $0=f(a)-g(a)=f(a)$, откуда следует, что $a=x$. Аналогично получается и равенство $c=z$. А отсюда и из условия $a+b+c=x+y+z$ следует, что $b=y$.

35. Пусть $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ и $g(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$. В силу данных равенств разность $f(t)-g(t)=\alpha x^2$ при некотором α. Но из данных в условии неравенств следует, что на отрезке $[a,c]$ многочлен $f(t)$ а, значит, и разность $f(t)-g(t)$ меняет знак, и, следовательно, имеет корень. Отсюда следует, что $\alpha=0$, то есть многочлены $f(t)$ и $g(t)$ совпадают, а потому попарно совпадают и их корни.

Данная задача, очевидно, является видоизменением предыдущей. Подобным образом может быть рассмотрено еще одно аналогичное утверждение. Смекните, какое?

36. По условию

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-(x+y+z)(xy+xz+yz)=$$
$$=(t-(x+y+z))(t^2-(xy+xz+yz)).$$

Поэтому два из трех корней многочлена $f(t)$ являются корнями двучлена $t^2-(xy+xz+yz)$, а их сумма равна нулю по теореме Виета.

37. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. По условию

$$f(t)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+xz)t-xyz=t^3-(x+y+z)t^2+(x+y+z)t-1=$$
$$=(t-1)(t^2+t+1-(x+y+z)t),$$

то есть 1 – один из корней многочлена.

38. По условию значение многочлена $(t-a)(t-b)(t-c)$ в точке $t=1$ отрицательно. Значит, (нарисуйте график) справа от точки $t=1$ лежит нечетное число корней этого многочлена. Но все корни не могут быть больше единицы, так как их произведение $abc=1$.

39. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. По условию выполняется равенство $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

40. Очевидно $u_1+u_2+u_3=v_1+v_2+v_3$. Кроме того, раскрывая скобки можно убедиться, что и $u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3$ и $v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3$ равняются одному и тому же числу

$$(a^2+b^2+c^2)(xy+xz+yz)+(ab+ac+bc)(xy+xz+yz)+$$
$$+(ab+ac+bc)(x^2+y^2+z^2).$$

Если вдобавок $u_1u_2u_3=v_1v_2v_3$, то многочлены $f(t)=(t-u_1)(t-u_2)(t-u_3)$ и $g(t)=(t-v_1)(t-v_2)(t-v_3)$ совпадают, а, значит, совпадают и множества их корней.

41. Тройки чисел $\dfrac{ax+by+cz}{a+b+c}$, $\dfrac{bx+cy+az}{a+b+c}$, $\dfrac{cx+ay+bz}{a+b+c}$ и a, b, c удовлетворяют условиям задачи 7.

42. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\geq b\geq c$. Тогда $1-c\geq 1-b\geq 1-a$ и $\dfrac{1+a}{2}\geq\dfrac{1+b}{2}\geq\dfrac{1+c}{2}$. Кроме того, $1-c\geq\dfrac{1+a}{2}$, так как

$a+2c \le a+b+c=1$, и аналогично $1-a \le \frac{1+c}{2}$. Значит тройки чисел $1-a$, $1-b$, $1-c$ и $\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2}$ удовлетворяют условиям задачи 7.

43. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \ge b \ge c$. Тогда $a+b-c \ge a+c-b \ge b+c-a$ и, кроме того, $a+b-c \ge a$ и $c \ge b+c-a$. Если a,b,c – стороны треугольника, то тройки чисел $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ и a,b,c удовлетворяют условиям задачи 7, откуда и следует нужное неравенство. Если числа a,b,c не удовлетворяют неравенствам треугольника, то в правой части доказываемого неравенства имеется ровно один отрицательный сомножитель и все очевидно.

44. Положим $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$. Тогда по условию $c=\frac{z}{x}$. После этой замены переменных задача легко сводится к предыдущей.

45. Прежде всего, заметим, что график любого кубического многочлена имеет центр симметрии. Действительно, сдвигом вдоль оси абсцисс можно «уничтожить» коэффициент при x^2 в формуле многочлена, а сдвигом вдоль оси ординат – его свободный член. В результате получим многочлен вида $\alpha x^3+\beta x$. Этот многочлен очевидно нечетен. Поэтому его график симметричен относительно начала координат, а значит, и исходный график имел центр симметрии. Если этот цент симметрии лежит на оси абсцисс, то в силу указанной симметрии $|p|=|q|$ и $b-a=c-b$. Если центр симметрии лежит выше оси абсцисс, то очевидно $|p|>|q|$. Кроме того, рассматриваемый многочлен монотонен на интервалах, на которые делят ось абсцисс критические точки. Поэтому, в рассматриваемом случае $b-a>c-b$ (нарисуйте график). Если центр симметрии лежит ниже оси абсцисс, то все неравенства меняются на противоположные.

46. Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x)$. У многочлена $f\left(x-\frac{a}{3}\right)=x^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$ коэффициент при x^2 равен нулю, поэтому центр симметрии его графика лежит на оси ординат. А тогда, чтобы корни многочленов $f(x)$ и $f(x-a/3)$ образовывали арифметические прогрессии необходимо и достаточно, чтобы свободный член был равен нулю, то есть $2a^3-9ab+27c=0$.

Правда, нужно еще позаботиться, чтобы корни были действительными. А для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при x у многочлена $f(x-a/3)$ не был положительным, что дает неравенство $a^2-3b\geq 0$.

47. По условию $x+y+z\geq\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$, значит, $x+y+z\geq 0$. Возводя неравенство $x+y+z\geq\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$ в квадрат, получим $2(xy+xz+yz)\geq x^2+y^2+z^2\geq 0$. Критические точки кубического многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz$ являются корнями квадратного трехчлена $3t^2-2(x+y+z)t+(xy+xz+yz)$. Так как неотрицателен свободный член этого трехчлена, его корни имеют один знак, а так как неотрицателен коэффициент при t, оба корня неотрицательны. Значит, неотрицательны, по крайней мере, два из трех корней многочлена $f(t)$ (вот здесь и нужен график). Но если, например, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z<0$, то $x+y>x+y+z\geq\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}>\sqrt{2(x^2+y^2)}$, что легко приводит к противоречию.

48. Здесь можно дважды применить рассматриваемый прием. А именно,

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b+c-a}\cdot\frac{b}{c+a-b}\cdot\frac{c}{a+b-c}}\geq 3$$

(первое неравенство следует из доказанного выше неравенства Коши, а второе справедливо в силу результата упражнения 43 а).

49. По условию число a^2b больше любого слагаемого в правой части неравенства. Графики многочленов $f(t)=(t-a^2b)(t-b^2c)(t-c^2a)$ и $g(t)=(t-b^2a)(t-a^2c)(t-c^2b)$ пересекаются в двух точках $-abc$ и 0, поэтому старший коэффициент их разности имеет тот же знак, что и значение в точке a^2b, а $f(a^2b)=0$ и $g(a^2b)>0$.

50. Большее (меньшее) из чисел a^5, b^5, c^5 не меньше (не больше) любого из слагаемых в правой части неравенства. Потому графики многочленов $f(t)=(t-a^5)(t-b^5)(t-c^5)$ и $g(t)=(t-a^3b^2)(t-b^3c^2)(t-c^3a^2)$ пересекаются между большим и меньшим из чисел a^5, b^5, c^5. Еще одна точка пересечения – $t=0$. Следовательно, старший коэффициент их разности имеет тот же знак, что и значение в самой правой из точек a^5, b^5, c^5, а в этой точке многочлен $f(t)$ обращается в ноль, а многочлен $g(t)$ не отрицателен.

51. Рассмотрим два многочлена $f(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)$ и $g(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)\left(x-\frac{c}{b}\right)\left(x-\frac{a}{c}\right)$. Их графики пересекаются ровно в двух точках 0 и –1. По условию, число $\frac{a}{c}$ – самое большое из шести чисел $\frac{a}{b},\frac{a}{c},\frac{b}{a},\frac{b}{c},\frac{c}{a},\frac{c}{b}$. Поэтому разность имеет при больших значениях x тот же знак, что и при $x=\frac{a}{c}$, откуда следует нужное неравенство.

52. То из чисел $\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{c},\frac{c^2}{a}$, у которого в числителе стоит наибольшее (наименьшее) из чисел a, b, c не меньше (не больше) любого из слагаемых в правой части неравенства. Поэтому между наибольшим и наименьшим из чисел $\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{c},\frac{c^2}{a}$ лежит точка пересечения графиков двух многочленов $f(t)=\left(t-\frac{a^2}{b}\right)\left(t-\frac{b^2}{c}\right)\left(t-\frac{c^2}{b}\right)$ и $g(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$. Еще одна точка пересечения – это $t=0$. Поэтому старший коэффициент их разности имеет тот же знак, что и значение в самой правой из точек $\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{c},\frac{c^2}{b}$.

53. Если, например, a наибольшее из чисел a,b,c, то $b+c$ будет наименьшим из знаменателей шести дробей, входящих в неравенство. Поэтому дробь $\frac{a}{b+c}$ будет наибольшей из этих шести дробей. По той же причине и наименьшая дробь находится в левой части доказываемого неравенства. А произведения дробей, стоящих в левой и правой частях неравенства, равны. Остается рассмотреть два многочлена, корнями которых являются дроби, входящие в левую и правую части неравенства соответственно, и убедиться, что их раз-

ность – квадратный трехчлен с неположительным старшим коэффициентом.

54. Так как произведение чисел $\sqrt{\frac{ab}{c^2}}, \sqrt{\frac{ac}{b^2}}, \sqrt{\frac{bc}{a^2}}$ равно единице, наименьшее из них не превосходит 1, поэтому его квадрат не больше его самого. По аналогичной причине большее из слагаемых в правой части неравенства не меньше любого из слагаемых в его левой части. А дальше работают те же идеи, что и в решении предыдущего упражнения.

55. Достаточно доказать четыре неравенства

$$a+b+c \le \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b} \le \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$$

и

$$a+b+c \le \frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b} \le \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab},$$

каждое из которых доказывается аналогично предыдущим. При такой декомпозиции задачи теряется симметричность. Обычно этого следует избегать, но используемый здесь метод мало чувствителен к симметрии задачи, что и приводит к успеху.

56. Эта задача двойственна задаче 7. Рассмотрим многочлены $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и $g(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. По условию на отрезке $[a,c]$ многочлен $g(t)$ меняет знак, поэтому разность $g(t)-f(t)$ имеет на этом отрезке корень. Далее, эта разность меняет знак на отрезке $[0,a]$, поэтому имеет там еще один корень. Поскольку эта разность – квадратный трехчлен и $g(c)-f(c)\ge 0$, ее старший коэффициент положителен, что дает неравенство $a+b+c\ge x+y+z$. А так как разность $g(t)-f(t)$ имеет два неотрицательных корня, коэффициент при t у этой разности не может быть положительным. Отсюда следует второе неравенств. Случай $a=x$ придется рассмотреть отдельно, но это проще.

57. Снова рассмотрим разность многочленов $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и $g(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. Это – квадратный трехчлен, а значит, ее график – парабола. Коэффициент при t этого трехчлена отрицателен, значит, в точке $t=0$ он убывает. А на отрезке $[a,c]$ он меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в какой-то точке этого отрезка он возрастает. Взглянув на график можно убедиться, что тогда парабола расположена «рогами вверх», что и дает нужное неравенство.

58. Правое неравенство справедливо для всех положительных чисел a, b, c и является следствием задачи 7. Докажем левое. Рассмотрим многочлены $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и $g(t)=t(t-p)^2$, где p – полупериметр треугольника. В силу неравенства треугольника корни многочлена $f(t)$ лежат между корнями многочлена $g(t)$, а разность $f(t)-g(t)$ имеет положительный корень и отрицательна при $t=0$. Поскольку эта разность – линейная функция, старший коэффициент положителен, что и требуется доказать.

59. Задача сводится к предыдущей с помощью тождества $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.

60. Начнем с правого неравенства. Рассмотрим многочлены

$$f(x)=\left(x-\frac{a+b+c}{a+b}\right)\left(x-\frac{a+b+c}{a+c}\right)\left(x-\frac{a+b+c}{b+c}\right)$$

и $g(x)=(x-1)(x-2)^2$ (сравните с решением задачи 12). В силу неравенств треугольника, все три корня многочлена лежат на интервале $(1,2)$, значит, на этом интервале лежит корень разности $f(x)-g(x)$. Кроме того, из результата задачи 12 следует, что еще один корень этой разности лежит на интервале $(0,1)$. Значит разность – квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, откуда получается нужное неравенство.

Левое неравенство получается аналогично с рассмотрением многочленов $g(x)=(x-1)^3$ и

$$f(x)=\left(x-\frac{2(a+b+c)}{3(a+b)}\right)\left(x-\frac{2(a+b+c)}{3(a+c)}\right)\left(x-\frac{2(a+b+c)}{3(b+c)}\right).$$

Действительно, если отбросить большее из трех чисел, то их среднее арифметическое уменьшится, а если меньшее – увеличится. Поэтому корень $g(x)$ лежит между крайними корнями $f(x)$.

61. Перепишем данное неравенство в виде $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Пусть $f(t)=\left(t-\frac{1}{a}\right)\left(t-\frac{1}{b}\right)\left(t-\frac{1}{c}\right)$ и $g(t)=\left(t-\frac{1}{u}\right)\left(t-\frac{1}{v}\right)\left(t-\frac{1}{w}\right)$.

Между крайними корнями многочлена $g(t)$ лежат все три корня многочлена $f(t)$, а, значит, по крайней мере, один корень их разности. Кроме того, в силу неравенства $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, которое является частным случаем задачи 7, еще один корень лежит на интервале от 0 до меньшего корня многочлена $g(t)$. Других корней нет, поэтому старший коэффициент разности положителен, что и требуется доказать.

62. На каждом из интервалов (a,b) и (b,c) функция, стоящая в левой части уравнения, непрерывна и меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому на каждом из этих интервалов уравнение имеет корень. Других корней нет, поскольку после умножения на наименьший общий знаменатель уравнение превращается в квадратное.

63. Рассмотрим функцию $f(t)=\dfrac{x}{2-xt}+\dfrac{y}{2-yt}+\dfrac{z}{2-zt}$. Ее точки разрыва вырезают на оси абсцисс два конечных интервала, на каждом из которых она меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (чтобы убедиться в этом, удобно записать функцию в виде $f(t)=\dfrac{1}{\frac{2}{x}-t}+\dfrac{1}{\frac{2}{y}-t}+\dfrac{1}{\frac{2}{z}-t}$), а значит, имеет корень. Так как после умножения на общий знаменатель получается квадратное уравнение, других корней нет. Один из указанных интервалов целиком содержит отрезок $[0,1]$, поскольку, если $0\le t\le 1$ и, например, $2-zt=0$, то $z\ge 2$, что противоречит условию. А так как по условию $f(0)=0$, получим $f(1)\ge f(0)$, что и требуется доказать.

64. Правое неравенство доказано при решении задачи 13. Логика доказательства левого неравенства примерно та же. Рассмотрим функцию $f(t)=\dfrac{a}{a+b+ct}+\dfrac{b}{b+c+at}+\dfrac{c}{c+a+bt}$. После умножения на общий знаменатель уравнение $f(t)=1$ становится кубическим, поэтому не может иметь более трех корней. Один из них $t=1$, а два других лежат на интервалах, заключенных между точками разрыва функции, то есть отрицательны. Поэтому $f(0)>1$, что и требуется.

65. Эта задача является обобщением предыдущей, и решение тоже обобщается непосредственно. Для доказательства левого неравенства рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{a_1}{a_1+a_2+(a_3+\ldots+a_n)x}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+a_1+(a_2+\ldots+a_{n-1})x}$$

(она опять строится так, чтобы при $x=1$ произошло упрощение формулы). Точки разрыва этой функции вырезают на луче $x\le 0$ $n-1$ интервал, на каждом из которых функция непрерывна и меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, на каждом из этих интервалов есть корень уравнения $f(x)=1$. Таким образом, определяется положение $n-1$ корней. Еще один корень $x=1$ угадывается непосредственно. А больше корней нет, поскольку уравнение $f(x)=1$ сводится к алгебраическому уравнению степени n. Поэтому $f(0)>1$, что доказывает левое неравенство. Для доказательства правого можно рассмотреть функцию

$$f(x)=\frac{a_1+(a_3+\ldots+a_n)x}{a_1+a_2+(a_3+\ldots+a_n)x}+\ldots+\frac{a_n+(a_2+\ldots+a_{n-1})x}{a_n+a_1+(a_2+\ldots+a_{n-1})x}.$$

(ее вид можно угадать, заметив, что $\frac{a_1}{a_1+a_2}-1=-\frac{a_2}{a_1+a_2}$ и таким образом доказательство правого неравенства сводится к доказательству левого).

66. Пусть $f(x)=\frac{a+b+c}{1+(a+b+c)x}-\frac{a}{1+ax}-\frac{b}{1+bx}-\frac{c}{1+cx}$. На двух интервалах, ограниченных точками $-\frac{1}{a},-\frac{1}{b},-\frac{1}{c}$, она непрерывна и меняется от $+\infty$ до $-\infty$, а значит, имеет два отрицательных корня. Еще один корень $x=0$. Так как уравнение сводится к кубическому, других корней нет. Самая правая точка разрыва функции – точка $x=-\frac{1}{a+b+c}$. При приближении к ней справа, функция $f(x)$ стремится к $+\infty$. Значит, при $x=0$ функция меняет знак с «плюса» на «минус». Следовательно, $f(1)<0$, что и требуется доказать.

67. При доказательстве правого неравенства можно, не ограничивая общности, считать, что $a+b+c=3$. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}+\frac{x}{x+c}-\frac{3x}{x+1}$. Чтобы нарисовать ее график, можно, воспользовавшись тождеством $\frac{x}{x+a}=1-\frac{a}{x+a}$ и тремя аналогичными, записать ее в виде $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}-\frac{c}{x+c}$. Точки разрыва $-a$, $-b$, $-c$ выделяют на оси абсцисс два ограниченных интервала, на одном из которых функция непрерывна и меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а значит, имеет корень. Еще один корень $x=0$ очевиден. Уравнение $f(x)=0$ после умножения на общий знаменатель и упро-

щения сводится к квадратному, поэтому других корней нет. Остается заметить, что при $x=0$ функция меняет знак с «минуса» на «плюс», а на интервале $(0, +\infty)$ этот знак сохраняет, поэтому $f(1)\geq 0$. Это доказывает правое неравенство.

Для доказательства левого неравенства можно рассмотреть функцию $g(x)=\frac{a}{1+a^2-(1-a)^2x}+\frac{b}{1+b^2-(1-b)^2x}+\frac{c}{1+c^2-(1-c)^2x}$. левее точки $x=1$ нет точек разрыва этой функции, поэтому при $x\leq 1$ эта функция непрерывна, а, значит, монотонна (поскольку каждое слагаемое возрастает там, где оно непрерывно). Поэтому $g(0)\leq g(1)$, что и требуется доказать.

68. Рассмотрим функцию $f(t)=\frac{a_1}{ts-a_1}+...+\frac{a_n}{ts-a_n}-\frac{n}{tn-1}$. Точки $\frac{a_1}{s},...,\frac{a_n}{s}$ вырезают на оси абсцисс $n-1$ ограниченный интервал. На каждом из них, кроме одного, функция $f(t)$ непрерывна и меняется от $+\infty$ до $-\infty$, а значит, имеет корень. Следовательно, на интервале $(0,1)$ у функции имеется, по крайней мере, $n-2$ корня. Кроме того, $f(0)=0$. После умножения уравнения $f(t)=0$ на общий знаменатель и упрощения получится уравнение степени $n-1$, поэтому других корней нет. Следовательно, справа от самой правой точки разрыва функция не меняет знака, а приближаясь к этой точке справа, она стремится к $+\infty$. Тогда она положительна и при $t=1$, что и требуется .

69. Как следует из решения предыдущего упражнения $f(2)\geq 0$, откуда следует нужное неравенство.

70. Все та же функция меняет знак с «плюса» на «минус» в точке $t=0$, а на интервале $(-\infty,0)$ знак сохраняет. Значит, она неотрицательна при $t=-1$, что дает неравенство $\frac{a_1}{s+a_1}+...+\frac{a_n}{s+a_n}\leq\frac{n}{n+1}$. Остается воспользоваться тождествами $\frac{a_i}{s+a_i}=1-\frac{s}{s+a_i}$.

71. Успех в решении трех предыдущих упражнений подсказывает целесообразность приведения данного неравенства к тому же виду путем умножения его на $s=a+b+c+d$. После упрощения получим

неравенство $6 \le \frac{c+d}{a+b} + \frac{b+d}{a+c} + \frac{b+c}{a+d} + \frac{a+d}{b+c} + \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+b}{c+d}$. А теперь рассмотрим функцию $f(x) = \frac{c+d}{sx-(c+d)} + \ldots + \frac{a+b}{sx-(a+b)} - \frac{6}{2x-1}$. Дальнейшее практически дословно повторяет решение упр. 68.

72. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{a_1^2}{sx+a_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{sx+a_n} - \frac{s}{nx+1}$. Как и выше устанавливается, что уравнение $f(x)=0$ имеет $n-2$ отрицательных корня. Еще один корень $x=0$ легко угадывается. Вдобавок несложными вычислениями устанавливается, что при $x=0$ обращается в ноль производная функции $f(x)$, то есть этот корень кратный. А поскольку уравнение $f(x)=0$ приводится к алгебраическому уравнению степени n, кратность корня $x=0$ равна двум и других корней нет. Отсюда приходим к неравенству $f(1)\ge 0$, что и требуется.

73. Пусть $f(x) = \frac{a_1^3}{sx+a_1} + \ldots + \frac{a_n^3}{sx+a_n} - \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{nx+1}$. Обычными рассуждениями устанавливается, что у этой функции имеется n корней, из которых $n-2$ отрицательны, а один равен нулю. Но теперь значение производной функции $f(x)$ при $x=0$ равно $n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) - s^2$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим, это значение положительно. Значит, в левой полуокрестности точки $x=0$ функция $f(x)$ принимает отрицательные значения. А при приближении справа к самой правой точке разрыва значение этой функции стремится к $+\infty$. Поэтому и недостающий корень тоже отрицателен. Следовательно $f(1)\ge 0$, что и нужно доказать.

74. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{s}{sx-2a_1} + \ldots + \frac{s}{sx-2a_n} - \frac{n}{nx-2}$. По условию все точки разрыва этой функции лежат на интервале (0,1). Привычными рассуждениями отсюда можно вывести, что на этом интервале лежат $n-2$ корня уравнения $f(x)=0$. Еще один корень $x=0$ очевиден. А поскольку уравнение приводится к алгебраическому уравнению степени $n-1$, других корней нет. Значит, справа от самой правой точки разрыва функция сохраняет знак. А так как при приближении к этой точке разрыва функция стремится к $+\infty$, этот

знак положителен. Следовательно, $f(1)\geq 0$, что эквивалентно доказываемому неравенству.

75. Уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=\dfrac{a_1^2}{sx-2a_1}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{sx-2a_n}-\dfrac{s}{nx-2}$, имеет n–2 корня на интервале (0,1) и двукратный корень $x=0$. Поскольку оно приводится к алгебраическому уравнению степени n, других корней нет. Отсюда следует неравенство $f(1)\geq 0$, эквивалентное доказываемому.

76. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{a}{a+b+c+(c-a)x}+\frac{b}{a+b+c+(a-b)x}+\frac{c}{a+b+c+(b-c)x}.$$

Уравнение $f(x)=1$ после умножения на общий знаменатель приводится к кубическому, а потому имеет не более трех корней. Точки разрыва функции $f(x)$ лежат вне отрезка [–1,1], причем две – по одну сторону этого отрезка. Меду этими двумя точками функция меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (или наоборот), а потому имеет корень. Еще один корень $x=0$ легко угадывается. Определим положение третьего корня. Один из конечных интервалов, на которых непрерывна функция $f(x)$, содержит отрезок [–1,1]. Вблизи концов этого интервала функция стремится к $+\infty$, значит, на этом интервале лежит два корня уравнения $f(x)=1$. А так как $f'(0)=\dfrac{-a(c-a)-b(a-b)-c(b-c)}{(a+b+c)^2}\geq 0$, третий корень отрицателен. Поэтому в точке $x=0$ функция $f(x)-1$ меняет знак с отрицательного на положительный, и потом на отрезке [0,1] этот знак сохраняет. Значит, $f(1)\geq 1$, что и требуется доказать.

77. Пусть $s=a+b+c+d$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{a}{\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}(3d+c-b-3a)x}+\ldots+\frac{d}{\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}(3c+b-a-3d)x}.$$

(переменные a,b,c,d переставляются циклически). Она имеет четыре точки разрыва, которые вырезают на числовой прямой три конечных интервала. Два из них не пересекаются с отрезком [–1,1], и в частности не содержат точки $x=0$. Поэтому на этих интервалах лежит по одному корню уравнения $f(x)=2/3$. Еще один – это $x=0$. А поскольку уравнение сводится к уравнению четвертой степени, есть еще один корень, положение которого можно определить по знаку производной функции $f(x)$ при $x=0$. Эта производная неотрицательна, поскольку равна $\dfrac{2(3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd))}{9(a+b+c+d)^2}$.

Значит, четвертый корень не положителен, и при $x\in[0,1]$ функция $f(x)-2/3$ не отрицательна. В частности $f(1)\geq 2/3$, что и нужно.

В этом и предыдущем упражнениях второй раз встречается замечательный эффект. Эти упражнения можно решить, используя мажоризацию (см. упр.27 и 29 из [2]). И опять использование мажоризации заменяется исследованием производной. При этом система линейных неравенств, характеризующих мажоризацию, заменяется одним квадратичным неравенством. Интересно бы понять, насколько общим является этот эффект.

78. Пусть $f(x)=\dfrac{a_1}{x-a_1}+\ldots+\dfrac{a_n}{x-a_n}$ и $g(x)=\dfrac{n(a_1+\ldots+a_n)}{nt-(a_1+\ldots+a_n)}$.

Функция $f(x)$ имеет на интервале $(0,1)$ n точек разрыва и, следовательно, на $n-1$ меньшем интервале, принадлежащем $(0,1)$, меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Н всех этих интервалах, кроме одного, функция $g(x)$ непрерывна, а потому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет по корню. Еще один корень – это $x=0$. А поскольку уравнение приводится к уравнению степени $n-1$, других корней нет. Значит, на интервале $[1,+\infty)$ разность $f(x)-g(x)$ не меняет знака. А так как справа от своей большей точки разрыва $f(x)$ стремится к $+\infty$, а $g(x)$ ограничена, эта разность положительна на $[1,+\infty)$. В частности $f(1)\geq g(1)$, что и требуется.

79. Рассмотрим функции $f(x)=\dfrac{a_1^2}{a_1+b_1x}+\dfrac{a_2^2}{a_2+b_2x}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{a_n+b_nx}$

и $g(x)=\dfrac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{a_1+\ldots+a_n+(b_1+\ldots+b_n)x}$. Первая из них имеет n точек разрыва на отрицательной полуоси. Эти точки вырезают $n-1$ конечный интервал, на каждом из которых функция меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Один из них может «портить» точка разрыва функции $g(x)$, а на остальных непременно лежит по одному корню уравнения $f(x)=g(x)$. Еще один корень – это $x=0$. Причем при $x=0$ производные обеих функций равны $-(b_1+\ldots+b_n)$, поэтому этот корень кратный. А поскольку уравнение приводится к уравнению степени n, отсюда следует, во-первых, что других корней нет, во-вторых, кратность корня $x=0$ вторая, а в-третьих, что один из указанных конечных интервалов действительно испорчен. Последнее обстоятельство означает, что знак разности $f(x)–g(x)$ на отрезке от самой правой части разрыва до нуля определяется знаком функции $f(x)$, то есть положителен. А поскольку корень $x=0$ имеет вторую кратность, в нем функция не меняет знака, то есть остается положительной при $x>0$. Неравенство $f(1)\geq g(1)$ – искомое.

80. В данном случае важно сохранить симметрию задачи. Поэтому рассмотрим функцию $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{a_i+a_j x}-\frac{n}{1+x}$. Далее решение аналогично предыдущему. Уравнение $f(x)=0$ приводится к алгебраическому уравнению степени n^2. Оно имеет $n^2–2$ отрицательных корней и двукратный корень $x=0$. Неравенство $f(1)\geq 0$ после сокращения и приведения подобных членов даст нужный результат.

81. Пусть $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{a_k x+b_k}-\frac{AB}{Ax+B}$. Точки $-\frac{b_1}{a_1},\ldots,-\frac{b_n}{a_n}$ вырезают на оси абсцисс $n–1$ ограниченный интервал, на каждом из которых, кроме, быть может, одного, функция непрерывна и меняется от $+\infty$ до $-\infty$, и, значит, имеет корень. Таким образом, имеется, по меньшей мере, $n–2$ отрицательных корня, и еще корень $x=0$. Из записи $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{x+\frac{b_k}{a_k}}-\frac{B}{x+\frac{B}{A}}$ видно, что уравнение $f(x)=0$ приводится к уравнению степени $n–1$, поэтому других корней нет. Значит, точка $-\frac{B}{A}$ действительно лежит на одном из указанных ограниченных интервалов, и самая правая точка разрыва функции $f(x)$ принадлежит множеству $\left\{-\frac{b_1}{a_1},\ldots,-\frac{b_n}{a_n}\right\}$. Справа от нее функция убывает от $+\infty$ и меняет знак при $x=0$, а потому отрицательна при $x=1$.

82. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{a}{1+bx}+\frac{b}{1+ax}+\frac{x}{1+ab}$. Докажем, что $f(x)\leq 2$ при $0\leq x\leq 1$. Функция $f(x)$ имеет две точки разрыва на отрицательной полупрямой. Поэтому уравнение $f(x)=2$ имеет один отрицательный корень. Кроме того, $f(x)\to+\infty$ когда x стремится к

правой точке разрыва. Но $f(0)\le 2$, следовательно, между правой точкой разрыва и нулем имеется еще один корень уравнения $f(x)=2$. Но это уравнение приводится к алгебраическому уравнению третьей степени, значит, где-то есть еще один корень. Поскольку $f(x)\to+\infty$, когда $x\to+\infty$, из неравенства $f(1)\le 2$ будет следовать, что этот корень лежит на интервале $(1,+\infty)$, а на интервале $(0,1)$ разность $f(1)-2$ остается отрицательной. Это неравенство и остается доказать. Для этого рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1+a}+\dfrac{1}{1+ax}$. График ее выглядит качественно так же, как график функции $f(x)$. Поэтому те же рассуждения приводят к достаточности неравенств $g(0)\le 2$ и $g(1)\le 2$. Вновь первое из них очевидно, а для доказательства второго можно рассмотреть аналогичным образом функцию $h(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{1+x}$.

83. Рассмотрим функцию $f(t)=\dfrac{1}{t+x^2}+\dfrac{1}{t+y^2}-\dfrac{2}{t+xy}$. По условию $f(1)=0$. Но, кроме того, непосредственно проверяется, что $f(xy)=0$. Остается заметить, что после умножения на общий знаменатель уравнение $f(t)=0$ сводится к линейному, а потому функция $f(x)$ не может иметь более одного корня.

84. Уравнение $\sqrt{1+x^2}=x+c$ после возведения в квадрат и упрощения превращается в линейное, а потому имеет не более одного корня.

85. Если $x<1$, то $\log_x(x+1)<0<\log_{x+1}(x+2)$ и все очевидно. Если $x>1$, то уравнение $\log_x(x+1)=c$ имеет решение только при $c>1$. Но из этого уравнения следует уравнение $x+1=x^c$ или $1+\dfrac{1}{x}=x^{c-1}$, которое при $c>1$ имеет не более одного корня, так как левая часть убывает, а правая возрастает. Остается применить лемму.

86. Уравнение $\dfrac{a^x-b^x}{a^x+b^x}=c$ равносильно уравнению $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{1+c}{1-c}$. Поэтому оно имеет один корень, если $-1<c<1$, и не имеет корней в противном случае. Следовательно, функция моно-

тонна. Чтобы убедится, что она возрастает, достаточно сравнить ее значения в точках 0 и 1.

87. При любом значении константы c, производная функции $g(x)=(2^x-1)-c(3^x-1)$ имеет не более одного корня, следовательно, сама функция имеет не более двух корней, один из которых – ноль. Поэтому, при любом c уравнение $\frac{2^x-1}{3^x-1}=c$ имеет не более одного решения. Значит на интервале $(-\infty,0)$ она убывает от 1 до некоторого предельного значения a, а на интервале $(0,+\infty)$ убывает от некоторого, возможно, другого предельного значения b до нуля. Но при $c\in(0,1)$ уравнение $\frac{a^t-1}{b^t-1}=c$ имеет менее двух корней, только если корень уравнения $g(t)=0$ – кратный. Поэтому два упомянутых предельных значения совпадают. В самом деле, в случае $a>b$ уравнение $\frac{a^t-1}{b^t-1}=c$ не имело бы решения для всех $c\in(a,b)$ (а не для одного), а в случае $a<b$ оно имело бы два решения при тех же c.

88. Рассмотрим функцию $f(t)=\frac{a^t-1}{b^t-1}$, где $b>a>1$ – любые числа. Дословно повторяя рассуждения предыдущей задачи, убедимся, что она убывает. Значит, ее производная в точке $t=n$ отрицательна, откуда легко получается неравенство $\frac{a^n\ln a}{a^n-1}<\frac{b^n\ln b}{b^n-1}$, которое и означает монотонность функции $F(x)$.

89. Используя замену переменных $y=\frac{1}{x}$, преобразуем уравнение $f(x)=c$ к виду $1+y=c^y$. Это уравнение имеет не более двух решений в силу выпуклости функции c^y. Одно из них – это $y=0$. Поэтому уравнение имеет не более одного положительного решения.

90. Убывание функции $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ следует из возрастания функции $g(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$. Последнее устанавливается так же, как в решении предыдущего упражнения.

10. Приложение

W – Международная олимпиада;
B – Всесоюзная или заключительный этап Всероссийской;
P – четвертый (зональный) этап Всероссийской;
O – третий (областной) этап Всероссийской;
M – Московская;
p – второй (районный) этап Всероссийской;
Л – Ленинградская (Санкт-Петербургская);
E – Свердловская область;
h – Задачник «Кванта» (с указанием номера);
И – олимпиада «Интеллектуальный марафон»;
S – Соросовская олимпиада на Украине;
П – Польская олимпиада;
H – Венгерская олимпиада.

Литература

1. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта. М.: ВЦ РАН. 2010.

2. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта и мажоризация. М.: ВЦ РАН. 2011.

3. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Симметрические многочлены. М.: ВЦ РАН. 2011.

4. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Неалгебраические преобразования. М.: ВЦ РАН. 2012.

5. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001.

6. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. М.: Наука, 1983.

7. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

8. Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. М.: Мир, 2006.

9. Курляндчик Л.Д., Файбусович А. История одного неравенства // Квант, 1991. № 4. С. 14–18.

10. Храбров А.И. Неравенство Шапиро // Задачи санкт–Петербургской олимпиады школьников по математике 2010 года. – СПб.: Невский диалект,2011. С.130–157.