Методы решета.
Листок 1

Задача 1.
Докажите, что функция Дикмана ρ удовлетворяет неравенству

$$\rho(u) \leq \frac{1}{\Gamma(u+1)}.$$

Каких чисел $n \leq N$ больше для больших N: имеющих простой делитель, больший $\sqrt{N}$ или не имеющих?
Задача 2. Пусть $\omega(n)$ — число различных простых делителей числа n, а $\varphi(n)$ — функция Эйлера

а) Докажите, что
$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x \ln\ln x + O(x).$$

б) Докажите, что
$$\sum_{n \leq x} \omega((n, \varphi(n)) \ll \ln\ln\ln\ln x.$$

Задача 3.

а) Докажите, что $\sigma_1(n) \ll n \ln\ln n$, а $\sigma_k(n) \ll n^k$ при $k > 1$.

б) Докажите, что
$$\varphi(n) \gg \frac{n}{\ln\ln n}$$

в) Докажите, что
$$\ln \tau_k(n) \leq \frac{(\ln k + o(1)) \ln n}{\ln\ln n}.$$

Задача 4.
Пусть λ_d — конечная последовательность вещественных чисел, причем $\lambda_d \neq 0$ только для бесквадратных d. Докажите, что она задает верхнее или нижнее решето соответственно, то есть

$$\sum_{d|P} \lambda_d |\mathcal{A}_d| \geq \mathcal{S}(\mathcal{A}, P)$$

тогда и только тогда, когда для любой мультипликативной функции $g(d)$ с $0 \leq g(p) \leq 1$ и любого n выполнено

$$\sum_{d|n} g(d)\lambda_d \geq \sum_{d|n} \mu(d) g(d).$$

(для нижнего решета неравенства в другую сторону)

Задача 5.
Докажите, что
$$\sum_{n\le x}\frac{n}{\varphi(n)}=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x+O(\ln x)$$
и
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\ln x+C+O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$
Найдите какое-нибудь выражение для константы C.

Задача 6.
Пусть $g(n)$ — неотрицательная мультипликативная функция такая, что $g(n)=O(n^{1/3})$ и $g(p)=O(1)$ для простых p. Пусть $\Lambda_g(n)$ такова, что
$$g(n)\ln n=\sum_{d|n}\Lambda_g(d).$$
Докажите, что носитель Λ_g лежит во множестве степеней простых чисел. Докажите, что если
$$\sum_{n\le x}g(n)=Cx+O(x^{1-\delta})$$
для некоторых $C,\delta>0$, то
$$\sum_{p\le x}\frac{g(p)\ln p}{p}\sim\ln x.$$

Задача 7.
Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $\mathcal{O}_K$ — соответствующее кольцо целых. Пусть $g(n)$ такова, что
$$\sum_{n\ge 1}\frac{g(n)}{n^s}=\sum_{0\ne I\subseteq\mathcal{O}_K}\frac{1}{(NI)^s},$$
то g — мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям задачи 6 (сумма по I пробегает все идеалы в $\mathcal{O}_K$). Кроме того, $g(n)\le\tau_d(n)$, где $d=[K:\mathbb{Q}]$. Выведите отсюда слабую версию теоремы Ландау: если $w_f(p)$ — число различных корней многочлена $f \mod p$, то для неприводимого f выполнено
$$\sum_{p\le x}\frac{w_f(p)\ln p}{p}\sim x.$$