

Листок 3, 22 сентября 2025 г.

**Задача 1.** Докажите, что любая группы порядка  $p^2$  абелева.

**Задача 2.** Классифицируйте группы порядков  $pq$ . Докажите, что всякая группа  $G$  порядка 45 абелева.

**Задача 3.** Докажите, что все группы порядка  $< 60$  разрешимы.

**Задача 4.** Доказать, что всякая простая группа  $G$  порядка 60 изоморфна  $A_5$ .

**Задача 5.** Постройте изоморфизмы:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3, \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4, \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5.$$

**Задача 6.** Докажите, что группа  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$  проста.

**Задача 7.** Постройте изоморфизм  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq A_6$ .

**Задача 8.** Докажите, что группа  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  проста.

**Задача 9.** Пусть  $G$  –  $p$ -группа, то есть  $|G| = p^n$ .

1. Докажите, что для любого  $k \leq n$  найдется подгруппа в  $G$  порядка  $p^k$ .
2. Докажите, что любая подгруппа в  $G$  порядка  $p^{n-1}$  нормальна.

**Задача 10.** Сформулируйте и докажите теорему Жордана–Гельдера в категории модулей над кольцом.

**Задача 11.** Пусть  $p, q$  простые. Докажите, что

1. нильпотентная группа разрешима,
2. всякая  $p$ -группа разрешима,
3. группа порядка  $p^n q$ , где  $p > q$  разрешима.

**Задача 12.** \* Постройте точное действие групп  $A_5, A_6, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$  на поле рациональных функций  $\mathbb{C}(x, y)$ .