Листок 2

Дедлайн: 12 Октября 2025, 23:59 МСК.

Комментарий: Я обещал, что второй листок будет меньше первого. К сожалению, реализовать обещание не получилось.
Когда будете посылать этот листок, то напишите в теме письма "Комплексная геометрия, листок 2".

1 Голоморфные функции. Подмногообразия и области в $\mathbb{C}^n$.

Задача 1.1: Докажите, что если X – связное и компактное комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, то X – точка.

Задача 1.2: Докажите теорему Римана о продолжении: пусть $P_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| < \varepsilon,\ j = 1, \dots, n\}$ – полидиск, а f – функция, голоморфная в $P_\varepsilon(0) \setminus z^1 = 0$ и ограниченная в $\overline{P} \setminus \{z_j = 0\}$. Докажите, что f продолжается до голоморфной функции в $P_\varepsilon(0)$.

Задача 1.3: Докажите, что единичный шар $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ и единичный полидиск $P_1(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, n\}$ не биголоморфны.

Задача 1.4: Пусть $f_d(z) = z_1^d + \cdots + z_n^d,\ d \in \mathbb{N},\ d \geqslant 2.$

1. Докажите, что множество $V_{d,c} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_d(z) = c\}$ гладко при $c \neq 0$.
2. При $d = 2$ докажите, что $V_{2,1}$ диффеоморфно TS^{n-1} – касательному расслоению сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = 1\}$.

Задача 1.5: Докажите локальную $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}$-лемму.

Пусть в полидиске задана форма α типа (p, q), где $p, q \geqslant 1$. Если $d\alpha = 0$, то найдется (возможно в меньшем полидиске) форма β типа $(p-1, q-1)$, такая, что $\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\beta$.

Задача 1.6: Пусть f – голоморфная функция на $\mathbb{C}^n$, такая, что $Z = Z(f) = \{f(z) = 0\}$– гладкое комплексное подмногообразие. Докажите, что для любой $(n-1, n-1)$-формы α с компактным носителем выполнено равенство:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|f|^2 \wedge \alpha = \int_Z \alpha.$$

Попробуйте сформулировать обобщение этого результата для произвольных $Z(f)$, которые не являются гладкими.

2 Почти комплексные структуры

В этой секции мы полагаем, что (M, J) – почти комплексное многообразие с почти комплексной структурой J. Напомним, что тензор Нийенхейса задается следующей формулой:

$$N(X, Y) = [X, Y] + \sqrt{-1}([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY].$$

Тут и далее (если не оговорено противное), X и Y – вещественные векторные поля на M.

Задача 2.1: Прямым вычислением покажите, что $N(X, Y)$ действительно является тензором.

Задача 2.2: Пусть Z_1, Z_2 – векторные поля типа $(1, 0)$, а $\pi^{0,1}$ – проекция на векторные поля типа $(0, 1)$. Покажите, что для любой функции $f \in C^\infty(M)$ верно следующее:

$$\pi^{0,1}([fZ_1, Z_2]) = f\pi^{0,1}([Z_1, Z_2]),$$
$$\pi^{0,1}([Z_1, fZ_2]) = f\pi^{0,1}([Z_1, Z_2]).$$

Задача 2.3: Пусть $Z_X = X - \sqrt{-1}JX$, а $Z_Y = Y - \sqrt{-1}JY$ – векторные поля типа $(1, 0)$. Покажите, что

$$4\pi^{0,1}([Z_X, Z_Y]) = N(X, Y) + \sqrt{-1}J(N(X, Y)).$$

Задача 2.4: Пусть α является $(1, 0)$-формой на почти комплексном многообразии (M, J). Докажите, что для $(d\alpha)^{2,0}$ и любых векторных полей Z_1, Z_2 типа $(0, 1)$ верна следующая формула:

$$(d\alpha)^{2,0}(Z_1, Z_2) = -\alpha(N(Z_1, Z_2)).$$

Задача 2.5:

1. Покажите, что на M существует связность D, такая что $DJ = 0$.

2. Покажите, что если на M существует связность D *без кручения* (это значит, что для любых двух векторных полей $X, Y \in \Gamma(TM)$ выполнено $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$), такая что $DJ = 0$, то J формально интегрируема.

3 Комплексные многообразия.

Задача 3.1: Докажите, что вложение Веронезе и вложение Сегре действительно являются вложениями.

Задача 3.2: Докажите, что вложение Плюккера также является вложением.

Задача 3.3: Определим тавтологическое расслоение $\mathcal{O}(-1)$ на $\mathbb{C}P^n$ как линейное расслоение, слоем которого над $Z = [Z_0 : \cdots : Z_n] \in \mathbb{C}P^n$ является прямая, порожденная вектором $(Z_0, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Докажите, что

1. $\mathcal{O}(-1)$ действительно является голоморфным линейным расслоением и выпишите его склеивающие коциклы. Покажите, что для $1 \leqslant k < n$ $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(-1)|_{\mathbb{C}P^k} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^k}(-1)$.

2. Докажите, что Z_j являются сечениями двойственного расслоения $\mathcal{O}(-1)^* = \mathcal{O}(1)$.

3. Докажите, что
$$X = \{(Z, w) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid Z_j w_k = Z_k w_j,\ 1 \leqslant j \neq k \leqslant n\}$$
является тотальным пространством расслоения $\mathcal{O}(-1)$.

Задача 3.4: Пусть X_d – гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная как множество нулей однородного многочлена P_d степени d. Покажите, что $K_{X_d} \cong \mathcal{O}(d-1-n)$. Более общо, вычислите K_X для полных пересечений $X = X_{d_1} \cap \dots \cap X_{d_p}$ в $\mathbb{C}P^n$.

Задача 3.5: Докажите, что каноническое расслоение K_X многообразия Хопфа X не имеет голоморфных сечений.

4 Пучки.

Пусть M – многообразие (возможно комплексное), а $\mathcal{F}$ – пучок абелевых групп на M.

Задача 4.1: Пусть $\mathcal{F}$ – пучок на многообразии M, $C^p(\underline{U}, \mathcal{F})$ – p-коцепи. Проверьте, что кограницы являются коциклами, т.е. что оператор
$$\delta : C^p(\underline{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\underline{U}, \mathcal{F})$$
удовлетворяет тождеству $\delta^2 = 0$.

Задача 4.2: Пусть $\underline{W} = \{W_b\}_{b\in B}$ – измельчение покрытия $\underline{U} = \{U_a\}_{a\in A}$ многообразия M. Это значит, что существует *отображение измельчения* $\mu : B \to A$, такое что $W_b \subset U_{\mu(b)}$.

Покажите, что μ определяет гомоморфизм

$$\hat{\mu} : C^p(\underline{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\underline{W}, \mathcal{F}),$$

причем $\delta\hat{\mu} = \hat{\mu}\delta$. Значит μ определяет отображение

$$\mu^* : H^p(\underline{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\underline{W}, \mathcal{F}).$$

Задача 4.3: В обозначениях предыдущей задачи предположим, что у нас имеется два отображения измельчения $\mu, \nu : B \to A$. Для любой коцепи $\sigma \in C^p(\underline{U}, \mathcal{F})$ определим $\Theta(\sigma) \in C^{p-1}(\underline{W}, \mathcal{F})$ по формуле:

$$\Theta(\sigma)_{W_0\dots W_{p-1}} = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j \sigma_{U_{\mu(0)}\dots U_{\mu(j)}U_{\nu(j)}\dots W_{\nu(p-1)}}|_{W_0\cap\dots\cap W_{p-1}}.$$

Покажите, что верно равенство

$$\hat{\mu}(\sigma) = \hat{\nu}(\sigma) + \delta\Theta(\sigma).$$

Задача 4.4: Принимая на веру тот факт, что когомологии Чеха с коэффициентами в постоянном пучке $\underline{\mathbb{R}}$ изоморфны сингулярным когомологиям с коэффициентами в $\mathbb{R}$, докажите теорему де Рама, которая гласит, что когомологии де Рама гладкого многообразия M изоморфны сингулярным когомологиям.

5 Домашнее чтение.

Эта часть листка не является обязательной. Здесь содержатся ссылки на некоторые примеры, с которыми стоит познакомиться для расширения кругозора. Это *не задачи*, присылать решения не надо. Но данные примеры можно будет обсудить, если возникнут вопросы.

1. Изучите в книге W.Bellman “Lectures on Kähler manifolds” пример 2.7, посвященный построению почти комплексной структуры на S^6 с помощью чисел Кэли. Частично это построение также изложено в книге С.П.Новикова и И.А.Тайманова "Современные геометрические структуры и поля”, гл.11, лемма 11.5 и пример вокруг нее.

   Попробуйте рассмотреть похожим образом сферу S^2 как единичную сферу в пространстве чисто мнимых кватернионов. Попробуйте также связать наличие комплексной структуры на S^2 с векторным произведением.

2. В книге Чжэня (Черна) “Комплексные многообразия” изложен пример построения комплексной структуры на произведении нечетномерных сфер $S^{2p-1} \times S^{2q-1}$. Изучите данный пример.

   Это обобщение многообразий Хопфа. К сожалению, это единственное известное мне изложение данного построения в литературе. Если будет время, мы обсудим другие обобщения многообразий Калаби-Экмана.

3. Важным классом почти комплексных многообразий являются симплектические многообразия. У нас не будет времени изучить их подробно, но построение почти комплексных структур на симплектических многообразиях изложено в четвертой главе книги Д.Макдафф и Д.Саламона “Введение в симплектическую топологию".