Листок 3, 24 февраля 2025 г.

Задача 1. Пусть $n_1, \dots, n_k$ – такой набор целых чисел, что никакое из непустых подмножеств не дает в произведнии полный квадрат. Найдите

1. степень расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_k})$,
2. его группу Галуа,
3. все промежуточные подполя,
4. примитивный элемент.

Задача 2. Найдите все промежуточные расширения

1. $\mathbb{K}(\sqrt[n]{a})/\mathbb{K}$, где $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, $\mathbb{K}$ содержит корень из 1 степени n,
2. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$,
3. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1})/\mathbb{Q}$.

Задача 3. Объясните, как решать кубическое уравнение в радикалах (выписывать до конца явную формулу необязательно).

Задача 4. Объясните, как решать уравнение четвертой степени в радикалах.

Задача 5. Докажите, что все группы порядка $\leqslant 10$ разрешимы.

Задача 6. На плоскости заданы оси координат и точка с координатами $(1, 0)$; разрешается выполнять следующие действия: (1) проводить прямую через две отмеченные точки; (2) проводить через отмеченную точку окружность с центром в отмеченной точке; (3) отмечать точку пересечения двух линий.

1. Докажите, что можно построить любую точку с рациональными координатами.
2. Пусть фиксирована некотрая последовательность построений. Обозначим через $\mathbb{K}_s$ поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ координатами всех точек, отмеченных после s шагов. Докажите, что $[\mathbb{K}_s : \mathbb{K}_{s-i}] \leqslant 2$.
3. Докажите, что для того, чтобы точку с координатами (x, y) можно было построить необходимо условие $[\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}] = 2^n$, а если расширение $\mathbb{Q}(x, y)/\mathbb{Q}$ нормально, то этого достаточно.
4. Докажите невозможность трисекции угла и удвоения куба.
5. Докажите, что правильный n-угольник можно построить тогда и только тогда, когда $n = 2^k p_1 \dots p_l$, где $2 < p_1 < \dots < p_l$ и $p_i = 2^{k-i}+1$ – простые числа.