

1. Пусть $H \subset G$ – подгруппа конечного индекса. Докажите, что есть подгруппа $N \subset H$ конечного индекса, нормальная в G (указание – рассмотрите действие группы на подходящем множестве).
2. Пусть G – конечная группа, а p – наименьший простой делитель $|G|$. Докажите, что любая подгруппа индекса p в G нормальна (это обобщение утверждения о нормальности подгруппы индекса 2).
3. Пусть порядок группы равен p^k , где p – простое. Докажите, что у неё нетривиальный центр (т.е. состоит не только из нейтрального элемента) (указание – снова рассмотреть действие группы на подходящем множестве).
4. Пользуясь предыдущей задачей (её решать необязательно) докажите, что группа порядка p^2 абелева.
5. Пользуясь третьей задачей (её решать необязательно) докажите, что в группе порядка p^k есть нормальная подгруппа порядка p^l для любого $l \leq k$.
6. Докажите, что любую группу можно вложить в A_n для достаточно большого n .
7. Вычислите централизатор следующих элементов группы S_6 : **а)** $(1, 2)$, **б)** $(4, 5, 6)$, **в)** $(1, 2)(4, 5, 6)$, **г)** $(1, 2, 3)(4, 5, 6)$, **д)** $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$ (достаточно предъявить какие-нибудь порождающие этой группы, но ещё лучше будет понять структуру этой группы).
8. Найдите нормализаторы подгрупп в S_6 , порождённых элементами из предыдущей задачи.
9. Пусть G_1, G_2 – подгруппы в G , причём $G_2 \subset N_{G_1}$ (нормализаторе G_1). Докажите, что $G_2/(G_1 \cap G_2) \simeq G_1G_2/G_1$, где G_1G_2 – подгруппа, порождённая произведениями g_1g_2 , где $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ (в частности, надо показать, что эти факторы определены).
10. Придумайте два способа представить группу S_4 в виде полупрямого произведения нетривиальных групп.
11. Покажите, что группу Q_8 нельзя представить в виде полупрямого произведения нетривиальных групп.
12. Постройте пример неабелевой группы порядка 27, в которой есть элемент порядка 9.