

9. ЛЕКЦИЯ 9. СИСТЕМЫ КОРНЕЙ, ПРОСТЫЕ КОРНИ, КЛАССИФИКАЦИЯ.

Все алгебры Ли в этой лекции конечномерные и над полем $\mathbb{C}$.

9.1. Неразложимые системы корней. Пусть (E, Φ) – система корней отвечающая паре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ из полупростой алгебры Ли и подалгебры Картана. Как по множеству Φ понять, что $\mathfrak{g}$ – простая?

Определение 9.1. Система корней Φ называется неприводимой, если не существует разложения $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ такого, что для любых $\alpha \in \Phi_1, \beta \in \Phi_2$ $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$.

Предложение 9.2. Полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста тогда и только тогда когда соответствующая ей система корней неприводима.

Предложение 9.3. Система корней Φ неразложима тогда и только тогда когда для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ существует последовательность $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ так что $\gamma_1 = \alpha, \gamma_n = \beta$ и $\gamma_i + \gamma_{i+1} \in \Phi$ для $i = 1, \dots, n$.

Пример 9.4. Система корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ неразложима, значит эта алгебра Ли проста.

Предложение 9.5. Система корней (E, Φ) неразложима тогда и только тогда когда не существует разложения $E = E_1 \oplus E_2$, $E_1 \perp E_2$, $\Phi_1 \subset E_1, \Phi_2 \subset E_2$ и $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$.

Определение 9.6. Неразложимые системы корней (E_1, Φ_1) и (E_2, Φ_2) изоморфны, если существует линейное отображение $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ такое, что $\varphi(\Phi_1) = \Phi_2$ и

$$(\alpha, \beta)_1 = c \cdot (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_2, c \in \mathbb{R}_{>0}, \alpha, \beta \in \Phi_1$$

9.2. Простые корни.

Определение 9.7. Системой простых корней называется набор $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ такой, что

- (1) Δ базис E ,
- (2) Любой корень из $\alpha \in \Phi$ представляется в виде $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$ такой, что либо $k_i \geq 0$ для любого i , либо $k_i \leq 0$ для любого i .

Отметим, что выбор системы простых корней задаёт:

- (1) Разбиение $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ на множество положительных и отрицательных корней.
- (2) Частичный порядок на Φ : $\alpha > \beta \iff \alpha - \beta \in \Phi^+$.

Лемма 9.8. Если $\alpha, \beta \in \Delta$, то $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Опишем способ получить (все возможные) системы простых корней. Пусть $H_\alpha, \alpha \in \Phi$ гиперплоскость, перпендикулярная корню α . Пусть $\gamma \in \Phi \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi^+} H_\alpha$. Тогда $\Phi = \Phi^+(\gamma) \sqcup \Phi^-(\gamma)$, где $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \gamma) > 0\}$. Пусть $\Delta(\gamma)$ это множество таких элементов $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$, что не существует представления $\alpha = \beta_1 + \beta_2, \beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$.

Теорема 9.9. (1) $\Delta(\gamma)$ является системой простых корней.

(2) Любая система простых корней имеет вид $\Delta(\gamma)$ для некоторого $\gamma \in E$.

Доказательство. Хамфрис, Теорема 10.1. □

Сколько существует разных систем простых корней?

Определение 9.10. Камерой Вейля называется связная компонента множества $\Phi \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi^+} H_\alpha$.

Ясно, что если $\gamma \in E$ меняется в пределах одной камеры Вейля, то множество $\Phi^+(\gamma)$ (а значит и $\Delta(\gamma)$) не меняются. Отсюда получаем биекцию

$$\{\text{камеры Вейля}\} \iff \{\text{системы простых корней}\}$$

9.3. Группа Вейля и простые корни. Простые корни образуют что-то вроде "базиса" системы корней. Насколько однозначно они задают саму систему корней? Ответ - однозначно. Для доказательства этого факта нам потребуется группа Вейля.

Определение 9.11. Группой Вейля системы корней Φ называется подгруппа $W \subset GL(E)$, порождённая отражениями

$$s_\alpha : \beta \mapsto \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

относительно гиперплоскостей $H_\alpha, \alpha \in \Phi$.

Упражнение. Группа Вейля конечна.

Группа Вейля – это "группа симметрий" системы корней Φ . Несложно видеть, что W действует на камерах Вейля и на системах простых корней.

Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 9.12. (1) W действует транзитивно на множестве камер Вейля и системах простых корней.
 (2) Если $\alpha \in \Phi$ произвольный, то для любой системы простых корней Δ существует $w \in W$ такой, что $w \cdot \alpha \in \Delta$.
 (3) Для любой системы простых корней $\Delta \subset \Phi$ группа W порождается $s_\alpha, \alpha \in \Delta$.

Доказательство. Хамфрис, Теорема 10.3. □

9.4. Матрица Картана и схема Дынкина. Пусть $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ – система простых корней. Положим

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Определение 9.13. Матрица Картана системы корней Φ это матрица

$$A = \left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)$$

Так как группа Вейля транзитивно действует на системах простых корней, то матрица Картана (с точностью до переупорядочивания строк и столбцов) не зависит от выбора системы простых корней.

Предложение 9.14. Матрица Картана однозначно определяет систему корней Φ .

Доказательство. Хамфрис, Предложение 11.1. □

Из семинаров известно, что для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ число $\langle \alpha, \beta \rangle \cdot \langle \beta, \alpha \rangle$ равно 0, 1, 2 или 3.

Определение 9.15. Граф Кокстера системы корней Φ это граф вершины которого это простые корни, и вершины α, β связаны между собой $\langle \alpha, \beta \rangle \cdot \langle \beta, \alpha \rangle$ рёбрами.

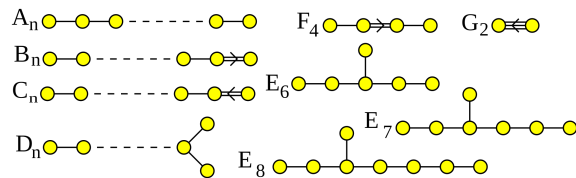
Определение 9.16. Схема Дынкина – это граф Кокстера со стрелкой, показывающей более длинный корень.

Легко видеть, что знание схемы Дынкина эквивалентно заданию матрица Картана, а, значит, и системы корней.

Предложение 9.17. Система корней неприводима $\iff$ схемы Дынкина связна.

9.5. **Классификация связанных схем Дынкина.** Итого, вопрос классификации простых алгебр Ли сводится к вопросу классификации связанных схем Дынкина и построения соответствующих алгебр Ли.

Теорема 9.18. Пусть Φ неприводимая система корней в евклидовом пространстве размерности n . Тогда схема Дынкина имеет один из следующих видов:



Доказательство. Хамфрис, теорема 11.4.

□