Определители.

Задача 1. Фиксируем два набора чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Вычислите определители следующих матриц: **а)** $(\alpha_i\beta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **б)** $\big(\cos(\alpha_i - \beta_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **в*)** $\big(\alpha^{j-i-1 \mod n}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Задача 2. а) Докажите, что для *определителя Вандермонда* верно равенство

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

б) Вычислите определитель следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1(x_1-1)\cdots(x_1-n+1) \\ 1 & x_2 & x_2(x_2-1) & \cdots & x_2(x_2-1)\cdots(x_2-n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n(x_n-1) & \cdots & x_n(x_n-1)\cdots(x_n-n+1) \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Покажите, что для линейной независимости набора функций $f_1, \dots, f_n \colon M \to \Bbbk$ на произвольном множестве M необходимо и достаточно существование такого набора точек $x_1, \dots, x_n \in M$, что $\det\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$.

Задача 4. Рассмотрим векторное пространство $n-1$ раз дифференцируемых функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим *Вронскиан* набора функций $W(f_1, \dots, f_n)(t) \coloneqq \det\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ Докажите, что если набор функций $f_1, \dots, f_n$ линейно зависим, то $W(t) \equiv 0$. Верно ли обратное? Докажите, что если хотя бы в одной точке $W(t) \neq 0$, то набор функций линейно независим. Докажите, что набор функций $e^{\lambda_i t}, i = 1, \dots, n, \lambda_i \neq \lambda_j$ линейно независим.

Задача 5. Сколько существует **а)** матриц 2×2 над полем $\mathbb{F}_p$, p — простое, с заданным определителем; **б)** невырожденных $n \times n$ матриц над полем из q элементов.

Задача 6. а) Покажите, что однородный грассманов квадратичный многочлен ω от четырёх переменных является произведение двух линейных форм тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$, пусть A_{ij} — минор 2×2 состоящий из i-го и j-го столбцов.
б) Покажите, что набор из 6 чисел $A_{ij} \in \Bbbk$ образуют набор 2×2 миноров матрицы размера 2×4 тогда и только тогда, когда выполнено $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$.

Существуют ли 2×4 матрицы со следующим набором миноров[1] **в)** $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; **г)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если матрица существует приведите пример.

Задача 7. а) Покажите, что любая *кососимметричная* матрица, т.е. $A^t = -A$, нечётного размера вырождена.
б) Определители кососимметрических матриц размера $2n \times 2n$ является полным квадратом в кольце многочленов от матричных элементов. Найдите явно выражение корня квадратного из определителя (со знаком $+$ называтся *Пфаффиан*).

Задача 8. Вычислите все частные производные вида $\frac{\partial^k \det A}{\partial a_{i_1 j_1} \cdots \partial a_{i_k j_k}}$.

Задача 9*. Пусть Γ — связный граф без петель и кратных рёбер. Занумеруем вершины графа числами от 1 до n. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ элементы, которой $a_{ii} = -\#\{\text{ребра при вершине } i\}$, $a_{ij} = 1$, если существует ребро ij, и нулю иначе. Докажите, что
а) $\det A = 0$;

б) все алгебраические дополнения A_{ii} отличны от нуля и равны между собой;

в) Γ — дерево если и только если все A_{ii} равны 1.

[1] написаны в порядке возрастания значений