

Листок 4, 29 сентября 2025 г.

Задача 1. Докажите, что нижний центральный ряд и верхний центральный ряд являются центральными рядами.

Задача 2.

1. Докажите, что если существует центральный ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_{m-1} \supset G_m = \{1\},$$

$$\text{то } Z_s G \subset G_s \subset Z^{m-s} G.$$

2. Верхний и нижний центральные ряды обрываются и их длины не превосходят m .
3. Длины верхнего и нижнего центральных рядов совпадают.

Задача 3. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1. группа G нильпотентна,
2. верхний центральный ряд группы G обрывается,
3. нижний центральный ряд группы G обрывается.

Задача 4. Назовем *разрешимой длиной* конечной разрешимой группы G длину ряда итерированных коммутантов. Иными словами, $sl(G) = s$, если s – минимальное натуральное число такое, что

$$G = G^{(0)}, G^{(1)} = [G^0, G^0], \dots, G^{(s)} = [G^{(s-1)}, G^{(s-1)}] = \{1\}.$$

1. Докажите, что G абелева тогда и только тогда, когда $sl(G) = 1$.
2. Для точной последовательности групп

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow G_2 \rightarrow 1$$

имеем: если G разрешима, то G_1, G_2 тоже, причем $sl(G_1) \leqslant sl(G)$, $sl(G_2) \leqslant sl(G)$.

3. Для точной последовательности групп

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow G_2 \rightarrow 1$$

если G_1, G_2 разрешимы, то G разрешима, причем $sl(G) \leqslant sl(G_1) + sl(G_2)$.

4. Найдите $sl(A_3), sl(A_4), sl(S_3), sl(S_4), sl((S_4 \times S_4) \rtimes \mathbb{Z}/2)$.
5. Найдите $sl(G)$, где $G = (\mathbb{Z}/3)^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ – группа Гессе.

Задача 5. Разрешима ли группа $GL_n(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ – поле? Разрешима ли группа $T_n(\mathbb{K})$ верхнетреугольных матриц порядка n ? Нильпотентна ли она? Нильпотентна ли группа $T_n(\mathbb{K})$ унитреугольных матриц порядка n ?

Задача 6. Пусть G – конечная группа. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1. G – нильпотентна,
2. Любая силовская подгруппа G нормальна,
3. G является прямым произведением своих силовских подгрупп,
4. Если H – собственная подгруппа в G , то нормализатор $N_H(G)$ также является собственной подгруппой в G .

Задача 7. Пусть G – конечная p -группа, $\text{Fr}(G)$ – её *подгруппа Фраттини* (пересечение всех максимальных подгрупп G).

1. Докажите, что $\text{Fr}(G) = G^p[G, G]$, где $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$, а $[G, G]$ – коммутант группы G .
2. Докажите, что фактор-группа $G/\text{Fr}(G)$ является элементарной абелевой p -группой (то есть изоморфна $(\mathbb{Z}/p)^k$ для некоторого k).
3. Сформулируйте и докажите универсальное свойство подгруппы Фраттини.
4. Что можно сказать про число порождающих G и $\text{Fr}(G)$?

Задача 8. Сформулируйте и докажите теорему Жордана–Гельдера в категории модулей над кольцом.