

Все кольца в этом листке считаются коммутативными, ассоциативными и с единицей.

1. **а)** (Критерий Эйзенштейна) Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, причём существует такое простое число p , что a_n не делится на p , все остальные a_i делятся на p , и a_0 не делится на p^2 . Докажите, что $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$. **б)** Пользуясь критерием Эйзенштейна, докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

2. Пусть R – факториальное кольцо. Докажите, что **а)** каждый неприводимый элемент порождает простой идеал; **б)** каждый простой идеал содержит неприводимый элемент; **в)** каждый главный простой идеал порождается неприводимым элементом; **г)** если простой идеал не содержит других простых идеалов, отличных от самого идеала и (0) , то он главный.

Существует понятие *простого* элемента кольца – это такой элемент, который порождает простой идеал. Из предыдущей задачи мы видим, что в факториальном кольце понятия простого элемента и неприводимого элемента совпадают. Но в общем случае это не одно и то же!

3. Кольцо называется *нётеровым*, если любая возрастающая цепочка идеалов стабилизируется (т.е. не бывает бесконечных строго возрастающих цепочек идеалов). **а)** Докажите, что в целостном нётеровом кольце любой необратимый элемент можно разложить на неприводимые множители. **б)** Докажите, что если все неприводимые элементы целостного кольца просты, то любой элемент кольца может быть разложен в произведение неприводимых не более чем одним способом (с точностью до перестановки и домножения на обратимые элементы).

4. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ евклидово (и, как следствие, факториально). Это кольцо состоит из пар целых чисел с такими законами сложения и умножения:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

5. **а)** Докажите аналогичный факт для кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. **б)** Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ не факториально.

6. Пусть F – поле, рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $F[[x]]$ (т.е. формальных сумм $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ со следующими законами сложения и умножения:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) x^i, \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j}\right) x^i.$$

а) Докажите, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ обратим тогда и только тогда, когда $\alpha_0 \neq 0$. **б)** Опишите все идеалы этого кольца. Какие из них простые/максимальные? **в)** Докажите, что это кольцо факториально.

7. **а)** Докажите, что факторкольцо $\mathbb{Q}/(x^2 - 1)$ изоморфно кольцу $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, построив явный изоморфизм. **б)** Верно ли, что $\mathbb{Q}/(x^2 - 2x + 1) \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$?

8. Пусть e – идемпотент (т.е. $e^2 = e$) в кольце R . Докажите, что **а)** идеал (e) является кольцом (с единицей) относительно сложения и умножения из R ; **б)** кольцо R изоморфно произведению колец (e) и $(1 - e)$.

Следующую задачу стоит решать, если вы знаете, что такое конечномерное векторное пространство и как с ним работать (у нас на курсе это будет через несколько занятий).

9. **а)** Пусть кольцо A – конечномерная алгебра над полем F . Докажите, что любой простой идеал в A максимален. **б)** Пусть кольцо A – конечномерная алгебра над полем F . Пользуясь КТО, докажите, что в нём конечное число простых идеалов.