Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №9

В условиях теоремы Б.Леви ($0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n \le \ldots$, $\int_A f_n d\mu \le K$, $\forall n$) пусть $\Omega = \{x \in A | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$, $\Omega_{r,n} = \{x \in A | f_n(x) > r$.

1) Доказать, что $\Omega_{r,1} \subset \Omega_{r,2} \subset \ldots$ и $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_{r,n}$ для любого $r > 0$;

2) вывести из неравенства Чебышева и теоремы о непрерывности меры, что

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_{r,n}\right) \le \frac{K}{r}$$

для любого $r > 0$;

3) убедиться, что $\mu(\Omega) = 0$;

4) пусть $0 < a < b$. Положим $f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}), & \text{при } a < x < b; \\ 0, & \text{при } x \le a \text{ или } x \ge b. \end{cases}$

Положим, также,

$$F(x) = \frac{\int_x^b f dt}{\int_a^b f dt}; \quad \psi(x_1, \ldots, x_n) = F(\sum_{i=1}^n x_i^2).$$

Проверить следующие свойства функции ψ, используемые при доказательстве теоремы о разбиении единицы: $\psi \in C^\infty$, $|\psi(x)| \le 1$ для любого x, и $\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \le \sqrt{a}; \\ 0, & \text{при } |x| \ge \sqrt{b}. \end{cases}$

План лекции №9. Замена переменных в интеграле Римана.

Теорема о разбиении единицы. Теорема о замене переменных.