Семинар 6 (27 марта). Представления $\mathfrak{sl}_2$ и родственников.

Определение 1. *Представлением вещественной группы Ли G* в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется гомоморфизм вещественных групп Ли $G \to GL(V)$. В завсисмости от поля, над которым определено V, представление называется вещественным или комплексным.

Представлением комплексной группы Ли G в векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ называется гомоморфизм комплексных групп Ли $G \to GL(V)$.

Определение 2. *Представлением вещественной (соотв. комплексной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$* в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется гомоморфизм вещественных (соотв. комплексных) алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. (В случае представления комплексной алгебры V предполагается комплексным).

Заметим, что если G – комплексная группа Ли, то представления G, рассмотренной как *вещественная* группа Ли, отличаются от её представлений как комплексной группы Ли.

Задача 1. Пусть G – связная, односвязная вещественная/комплексная группа Ли. Покажите, что представления G и $\mathfrak{g}$ в V находятся в естественной (что это значит?) биекции.

Например, представления SU_2 и $\mathfrak{su}_2$, $SL_2(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ находятся в естественной биекции.

Задача 2. Пусть $\mathfrak{g}$ – вещественная алгебра Ли. Покажите, что комплексные представления $\mathfrak{g}$ и её комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ находятся в естественной биекции.

Например, комплексные представления вещественных алгебр Ли $\mathfrak{su}_2, \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и комплексные представления комплексных алгебр Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ находятся в естественной биекции.

Задача 3. (а) Покажите, что отображение $E_{i,j} \to x_i \partial_{x_j}$ задаёт вложение $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ в алгебру Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{C}^n$.

(б) Постройте действие $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ на $S^k\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}[x,y]_k$, многочленах степени k от двух переменных. Явно выпишите действие образующих $e = E_{12}, f = E_{21}, h = E_{11} - E_{22}$ в базисе из мономов.

В этом представлении вектор x^k имеет максимальный вес относительно h, и $ex^k = 0$. Векторы, собственные для h и такие что $ev = 0$, называются *старшими.*

(в) Покажите, что $S^k\mathbb{C}^2$ – неприводимое представление.

(г) Пусть V – произвольное представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $v \in V$ – собственный вектор для h с собственным значением μ. Тогда ev, fv – тоже собственные для h с собственными значениями $\mu+2, \mu-2$ соответственно. В частности, если V конечномерно, то существует старший вектор.

(д) Покажите, что $S^k\mathbb{C}^2$ – это все конечномерные неприводимые представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. *Указание: если w – старший, то $f^i w$ линейно порождают пространство представления и $f^{k+1}w = 0$ для некторого k. Из $tr(h) = 0$ следует условие на вес w.*

Задача 4. (а) Покажите, что конечномерные комплексные представления SU_2 унитаризуемы, т.е. существует эрмитова форма, инвариантная относительно действия SU_2.

(б) Выведите отсюда, что конечномерные комплексные представления SU_2 (а значит, и $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) вполне приводимы.

Задача 5. Разложите на неприводимые представление $S^2\mathbb{C}^2 \otimes S^3\mathbb{C}^2$.

Задача 6. Опишите конечномерные комплексные представления $SO_3(\mathbb{R}), SO_3(\mathbb{C})$. *Указание: воспользуйтесь накрытиями $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. (а) Опишите конечномерные комплексные представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, рассмотренной как **вещественная** алгебра Ли.

(б) Опишите конечномерные комплексные представления $SO^+(1,3)$ (связной компоненты $O(1,3)$). *Указание: отображение из задачи 2 семинара 2 задаёт накрытие вещественных групп* $SL_2(\mathbb{C}) \to SO^+(1,3)$. *Какое у него ядро?*

Дополнительные задачи

Задача 2. Опишите конечномерные комплексные представления (а) $SO_4(\mathbb{R})$, (б) $SO_4(\mathbb{C})$.

Задача 3. Покажите, что $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ (универсальная накрывающая $SL_2(\mathbb{R})$) не является линейной группой Ли.