

ТОПОЛОГИЯ–2

ЛИСТОЧЕК 1: РАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Докажите, что если $p: E \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением, то для любого отображения $f: B' \rightarrow B$ индуцированное отображение $f^*(p): f^*(E) = B' \times_B E \rightarrow B'$ также является локально тривиальным расслоением. То же для расслоений Серра и Гуревича. В частности, ограничение $p|_A: p^{-1}(A) \rightarrow A$ расслоения на подпространство $A \subset B$ является расслоением.

2. а) Пусть $f: E_1 \rightarrow B_1$ и $g: E_2 \rightarrow B_2$ — локально тривиальные расслоения. Докажите, что $f \times g: E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ — тоже локально тривиальное расслоение. Какой у него слой? То же для расслоений Серра и Гуревича.

б) Докажите, что если $p: E \rightarrow C$ и $q: C \rightarrow B$ — расслоения Гуревича, то композиция $q \circ p: E \rightarrow B$ — тоже, и аналогично для расслоений Серра.

Примеры накрытий показывают, что это неверно для локально тривиальных расслоений.

в) Докажите, что если $p: E \rightarrow B$ — расслоение Гуревича со слоем F , то $\Omega p: \Omega E \rightarrow \Omega B$ — тоже расслоение Гуревича. Какой у него слой?

3. а) Убедитесь, что существует локально тривиальное расслоение $K \rightarrow S^1$, где K — бутылка Клейна.

Более того, для любого гомеоморфизма $h: F \xrightarrow{\cong} F$ проверьте, что естественная проекция $(I \times F)/((0, f) \sim (1, h(f))) \rightarrow S^1$ является локально тривиальным расслоением со слоем F .

б) Рассмотрим отображение $p: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, сопоставляющее точке $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, комплексную прямую, проходящую через эту точку и ноль. Докажите, что это локально тривиальное расслоение. Какой у него слой? Проверьте, что если ограничить это отображение на единичную сферу $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, то это тоже будет локально тривиальное расслоение (оно называется *расслоением Хопфа*). С каким слоем? Тривиальны ли эти расслоения?

в) Постройте аналогичное локально тривиальное расслоение $S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Вычислите с помощью этого расслоения все гомотопические группы $\mathbb{C}P^\infty$.

г) Используя расслоения из пункта б), постройте локально тривиальные расслоения $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$.

д) Рассмотрим естественное действие $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n - \{0\}$. Докажите, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ отображение $p_v: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, $p_v(A) = A \cdot v$ является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для действия $O(n)$ на единичной сфере S^{n-1} .

е) Группа $GL_n(\mathbb{R})$ естественно действует на $\mathbb{R}P^{n-1}$ (линейное преобразование переводит прямую, проходящую через 0, в прямую, проходящую через ноль). Рассмотрим для произвольной прямой $\ell \in \mathbb{R}P^{n-1}$ отображение $p_\ell: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$, $p_\ell(A) = A \cdot \ell$. Докажите, что p_ℓ является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для действия $O(n)$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$.

ё)* Обобщая пункт е), рассмотрим множество $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ k -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$ (например, $Gr_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$). Тогда группа $GL_n(\mathbb{R})$ естественно действует на этом множестве. Рассмотрим для произвольного подпространства $V \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ отображение $p_V: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $p_V(A) = A \cdot V$. Определим топологию на $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ как фактортопологию относительно этого отображения (проверьте, что она не зависит от V). Докажите, что p_V является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для действия $O(n)$ на $Gr_k(\mathbb{R}^n)$. Пространство $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ называется *пространством Грассмана*.

ж)* Обобщая пункт д), рассмотрим множество $V_k(\mathbb{R}^n)$ k -реперов (упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов) в $\mathbb{R}^n$ (например, $V_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n - \{0\}$, а $V_n(\mathbb{R}^n)$ можно отождествить с $GL_n(\mathbb{R})$). Тогда группа $GL_n(\mathbb{R})$ естественно действует на этом множестве. Рассмотрим для произвольного репера $v = (v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{R}^n)$ отображение $p_v: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$, $p_v(A) = A \cdot v$. Определим топологию на $V_{\mathbb{R}}(k, n)$ как фактортопологию относительно этого отображения (проверьте, что она не зависит от v). Докажите, что p_v является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для действия $O(n)$ на множестве $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^n)$ ортонормированных k -реперов. Пространство $V_k(\mathbb{R}^n)$ называется *пространством Штифеля*.
з)* Обобщая накрытия $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, рассмотрим естественную проекцию $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$, сопоставляющую ортонормированному k -реперу натянутое на него подпространство. Докажите, что это локально тривиальное расслоение. Какой у него слой? То же для аналогичной проекции $V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$.

и)* Мы имеем естественные вложения $\mathbb{R}^0 \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \dots$ (в качестве первых координат) и их объединение $\mathbb{R}^{\infty} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}^n$ (с топологией копредела, то есть, наибольшей топологии, относительно которой все включения $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{\infty}$ непрерывны). Эти вложения индуцируют вложения $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow V_k^{\perp}(\mathbb{R}^{k+1}) \hookrightarrow V_k^{\perp}(\mathbb{R}^{k+2}) \hookrightarrow \dots$ и мы можем сформировать объединение $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^{\infty}) = \bigcup_{n \geq k} V_k^{\perp}(\mathbb{R}^n)$ (также с топологией копредела).

Аналогично индуцируются вложения $Gr_k(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^{k+1}) \hookrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^{k+2}) \hookrightarrow \dots$ и мы получаем объединение $Gr_k(\mathbb{R}^{\infty}) = \bigcup_{n \geq k} Gr_k(\mathbb{R}^n)$.

Проверьте, что пространства $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^{\infty})$ и $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^{\infty})$ стягиваемы, и постройте аналогичные локально тривиальные расслоения $V_k(\mathbb{R}^{\infty}) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^{\infty})$ и $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^{\infty}) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^{\infty})$. Какие у них слои?

й)* Докажите, что для $k < m \leq n$ естественное отображение $V_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$, сопоставляющее m -реперу его первые k векторов, является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для пространств Штифеля ортонормированных реперов.

к) Рассмотрим подпространство $E_n^1 = \{(v, \ell) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1} \mid v \in \ell\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Докажите, что проекция $E_n^1 \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ на второй множитель является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для $n = \infty$. Эти расслоения называются *тавтологическими расслоениями над $\mathbb{R}P^{n-1}$* .

Что получится, если рассмотреть аналогичное отображение из $E_n^{1,1} = \{(v, \ell) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1} \mid v \in \ell, |v| = 1\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$?

Проверьте, что расслоение E_1^1 изоморфно проекции открытого листа Мёбиуса (то есть, без граничной окружности) на срединную окружность.

Тривиальны ли расслоения E_n^1 ?

л) Для сферы S^n с центром в нуле $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим подпространство $TS^n = \{(v, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \times S^n \mid v \perp x\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times S^n$. Докажите, что проекция $TS^n \rightarrow S^n$ на второй множитель является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? Это *касательное расслоение* к сфере S^n .

м)* Обобщая пункт к), рассмотрим подпространство $E_n^k = \{(v, V) \in \mathbb{R}^n \times Gr_k(\mathbb{R}^n) \mid v \in V\} \subset \mathbb{R}^n \times Gr_k(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что проекция $E_n^k \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ на второй множитель является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для $n = \infty$. Эти расслоения называются *тавтологическими расслоениями (k -мерных плоскостей)*.

н)* Рассмотрим множество $Fl(\mathbb{R}^n)$ (*полных флагов*) (вложенных цепочек подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{R}^n$ с $\dim_{\mathbb{R}} V_k = k$) в $\mathbb{R}^n$. Тогда группа $GL_n(\mathbb{R})$ естественно действует на этом множестве. Рассмотрим для произвольного флага $f = (0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{R}^n) \in Fl_{\mathbb{R}}(n)$ отображение $p_f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow Fl_{\mathbb{R}}(n)$, $p_f(A) = A \cdot f$. Определим топологию на $Fl(\mathbb{R}^n)$ как фактортопологию относительно этого отображения (проверьте, что она не зависит от f). Докажите, что p_f является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой? То же для действия $O(n)$ на $Fl(\mathbb{R}^n)$.

о)* Докажите, что $V_k(\mathbb{R}^n)$ является $(n - k - 1)$ -связным. То же для $V_k^{\perp}(\mathbb{R}^n)$.

п)* Докажите, что естественное вложение $GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_{n+1}(\mathbb{R})$, $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является $(n-1)$ -связным. То же для $O(n)$.

Если с помощью описанных выше вложений определить $GL_\infty(\mathbb{R})$ и $O(\infty)$, докажите, что вложения $GL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_\infty(\mathbb{R})$ и $O(n) \hookrightarrow O(\infty)$ являются $(n-1)$ -связными.

р)* Сформулируйте и докажите комплексные и кватернионные аналоги пунктов выше (за исключением а) и л)).

с)* Вещественный, комплексный и кватернионный варианты расслоения из пункта а) при $n=1$ дают соответственно расслоения $S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1 = S^1$, $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2$ и $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^1 = S^4$. Используя алгебру октав постройте аналогичное расслоение $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$.

т)* Рассмотрим (упорядоченное) конфигурационное пространство k точек в $\mathbb{R}^n$, то есть, пространство $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n) = \{(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid x_i \neq x_j\}$. Докажите, что для $k < m$ естественное отображение $\text{Conf}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$, сопоставляющее упорядоченному набору из m точек набор из его первых k точек, является локально тривиальным расслоением. Какой у него слой?

у)* Докажите, что $\pi_i(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)) = 0$ для $i \geq 2$. Единственная нетривиальная группа $PB_n = \pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2))$ называется группой крашенных кос на n нитях. При чём тут косы?

4. а) Докажите, что если в расслоении Серра $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ пространство E стягиваемо, то существует слабая эквивалентность $F \rightarrow \Omega B$.

В частности, из пункта и) задачи 3 выше (и её комплексного аналога) мы получаем слабые эквивалентности $O(n) \rightarrow \Omega Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ и $U(n) \rightarrow \Omega Gr_n(\mathbb{C}^\infty)$.

б) Докажите, что если в расслоении Серра $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ вложение слоя $F \hookrightarrow E$ гомотопно нулю, то длинная точная последовательность расслоения распадается на короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow 0,$$

причём эти короткие точные последовательности расщепляются (справа).

5. Предполагая известным, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (с образующей $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$), докажите, что

а) $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Какое отображение можно взять в качестве образующей?

б) группы $\pi_7(S^4)$ и $\pi_{15}(S^8)$ содержат прямое слагаемое $\mathbb{Z}$.

в) если существует локально тривиально расслоение $S^k \rightarrow S^n \rightarrow S^m$, то $k = m - 1$ и $n = 2m - 1$.

На самом деле реализуются только случаи $m = 1, 2, 4, 8$ и они представлены расслоениями из пункта с) задачи 3.

6. Докажите, что любое локально тривиальное расслоение над кубом I^n тривиально.

7. а) Проверьте, что отображение $C(I, X) \rightarrow X$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$ является расслоением Гуревича и гомотопической эквивалентностью. Для линейно связного X проверьте, что пространство $P(X, x_0) = \text{pt} \times_X C(I, X) = \{\gamma: I \rightarrow X \mid \gamma(0) = x_0\}$ стягиваемо и отображение $P(X, x_0) \rightarrow X$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$ является расслоением Гуревича. Какие у этих расслоений слои?

б) Для пунктированной пары (X, A, x_0) рассмотрим пространство $P(X, A, x_0) = \{\gamma: I \rightarrow X \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) \in A\}$. Докажите, что для линейно связных X и A отображение $P(X, A, x_0) \rightarrow A$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$ является расслоением Гуревича. Какие у него слои?

в) Докажите, что для всех $i \geq 0$ выполнено $\pi_i(P(X, A, x_0), c_{x_0}) \cong \pi_{i+1}(X, A, x_0)$, где c_{x_0} — постоянный путь в точке x_0 .

Выведите отсюда, что гомотопическая длинная точная последовательность пары (X, A) получается из длинной точной последовательности расслоения из пункта б).

г) Проверьте, что для (пунктированного) вложения $A \hookrightarrow X$ его гомотопический слой можно отождествить с $P(X, A, x_0)$.

д) Для (пунктированной) тройки $B \subset A \subset X$ рассмотрим вложение $i: P(A, B, x_0) \hookrightarrow P(X, B, x_0)$. Согласно пункту г) его гомотопический слой равен

$\text{hofib}(i) = P(P(X, B, x_0), P(A, B, x_0), c_{x_0})$. Докажите, что (если все пространства X, A, B линейно связны) это пространство $P(P(X, B, x_0), P(A, B, x_0), c_{x_0})$ гомотопически эквивалентно $\Omega P(X, A, x_0)$.

Выведите отсюда гомотопическую длинную точную последовательность тройки.

8. Докажите, что отображение $E \rightarrow B$ является расслоением Гуревича $\iff$ расслоение $p: E \times_B C(I, B) \rightarrow B$ обладает сечением (то есть, таким непрерывным отображением $s: B \rightarrow E \times_B C(I, B)$, что $p \circ s = \text{id}_B$).

9. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, а $A \subset X$ его замкнутое подпространство. Докажите, что вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением $\iff$ для любого пространства Y индуцированное отображение $C(X, Y) \rightarrow C(A, Y)$ («ограничение на A ») является расслоением Гуревича.

10. а) Приведите пример расслоения Гуревича, которое не является локально тривиальным.

б) Приведите пример отображения $p: E \rightarrow B$, не являющегося расслоением Серра, но у которого все слои $p^{-1}(b)$ гомотопически эквивалентны.

в)* Приведите пример локально тривиального расслоения, не являющегося расслоением Гуревича.

г) Докажите, что если для отображения $p: E \rightarrow B$ существует такое открытое покрытие $\bigcup U_\alpha = B$, что ограничения $p|_{U_\alpha}$ являются расслоениями Серра, то и само отображение p также является расслоением Серра.

д)* Докажите, что если для отображения $p: E \rightarrow B$ существует открытое покрытие $\bigcup U_\alpha = B$, допускающее подчинённое разбиение единицы (см., например, задачу 24 листочка 5 Топологии-1), и такое что ограничения $p|_{U_\alpha}$ являются расслоениями Гуревича, то и само отображение p также является расслоением Гуревича.

В частности, над паракомпактным B (то есть, таким, что любое его открытое покрытие обладает подчинённым разбиением единицы) любое локально тривиальное расслоение является расслоением Гуревича.

11. а) Для расслоения Гуревича $p: E \rightarrow B$ обозначим слои $F_b = p^{-1}(b)$, $b \in B$. Для пути

$$\gamma: I \rightarrow B \text{ рассмотрим диаграмму } \begin{array}{ccc} F_{\gamma(1)} & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ F_{\gamma(1)} \times I & \longrightarrow & B \end{array}, \text{ в которой левая стрелка — вложе-}$$

ние основания $F_{\gamma(1)} \times 1$ в цилиндр, верхняя стрелка — вложение слоя, а нижняя стрелка — композиция $F_{\gamma(1)} \times I \xrightarrow{pr_2} I \xrightarrow{\gamma} B$. Согласно определению расслоения Гуревича мы получаем

$$\text{отображение } H_\gamma: F_{\gamma(1)} \times I \rightarrow E, \text{ замыкающее коммутативную диаграмму } \begin{array}{ccc} F_{\gamma(1)} & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow H_\gamma & \downarrow p \\ F_{\gamma(1)} \times I & \longrightarrow & B \end{array}.$$

Докажите, что класс гомотопии отображения H_γ зависит только от класса гомотопии пути γ (с закреплёнными концами).

Проверьте, что ограничение $h_\gamma = H_\gamma|_{F_{\gamma(1)} \times 0}$ принимает значения в $F_{\gamma(0)}$ и является гомотопической эквивалентностью $h_\gamma: F_{\gamma(1)} \rightarrow F_{\gamma(0)}$, причём для компонируемых путей γ_1 и γ_2 выполнено $h_{\gamma_1} \circ h_{\gamma_2} \simeq h_{\gamma_1 \gamma_2}$.

Таким образом, корректно определено «действие с точностью до гомотопии» $\pi_1(B, b)$ на слое F_b , то есть, гомоморфизм $\pi_1(B, b) \rightarrow [F_b, F_b]$. Оно называется *монодромией*.

б) Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *слабой эквивалентностью*, если оно индуцирует биекцию $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ и биекции $\pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ для всех $x \in X$. Два пространства X и Y называются *слабо эквивалентными*, если существует «зигзаг» слабых эквивалентностей $X \leftarrow X_1 \rightarrow X_2 \leftarrow X_3 \rightarrow \dots \leftarrow X_n \rightarrow Y$. Для расслоения Серра над линейно связной базой докажите, что его слои слабо эквивалентны.

12. Расслоение Гуревича называется *пунктированным*, если все пространства и отображения в определении расслоения Гуревича являются пунктированными, а гомотопии (данная гомотопия со значениями в базе и её искомое поднятие) — неподвижными на отмеченных точках.

Проверьте, что пунктированное расслоение является обычным расслоением.

а) Рассмотрим пунктированное расслоение Гуревича $p: E \rightarrow B$ с отмеченными точками $b \in B$ и $e \in F_b = p^{-1}(b) \xrightarrow{i_b} E$. Докажите, что для любого пунктированного пространства (X, x_0) последовательность отображений пунктированных множеств

$$[(X, x_0), (F_b, e)] \xrightarrow{(ib)^*} [(X, x_0), (E, e)] \xrightarrow{p^*} [(X, x_0), (B, b)]$$

точна (в среднем члене).

б)* Аналогично докажите, что для любого корасслоения $\iota: A \rightarrow X$ с проекцией на кослой $\pi: X \rightarrow X/A$ и отмеченной точкой $x_0 \in A \subset X$ и любого пунктированного пространства (Z, z_0) последовательность отображений пунктированных множеств

$$[(X/A, *), (Z, z_0)] \xrightarrow{\pi^*} [(X, x_0), (Z, z_0)] \xrightarrow{\iota^*} [(A, x_0), (Z, z_0)]$$

точна (в среднем члене).

13. а) Для отображения $f: X \rightarrow Y$ рассмотрим $X \times_Y C(I, Y) = \{(x, \gamma) \mid f(x) = \gamma(0)\}$ и отображения $h(f): X \rightarrow X \times_Y C(I, Y)$, $x \mapsto (x, c_{f(x)})$, где c_y — постоянный путь в точке y , и $p(f): X \times_Y C(I, Y) \rightarrow Y$, $(x, \gamma) \mapsto \gamma(1)$. Проверьте, что $h(f)$ — гомотопическая эквивалентность (с обратной эквивалентностью $X \times_Y C(I, Y) \xrightarrow{pr_1} X$), $p(f)$ — расслоение Гуревича и $f = p(f) \circ h(f)$. Причём, если выбраны отмеченные точки $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$ и $(x_0, c_{y_0}) \in X \times_Y C(I, Y)$, то гомотопическая эквивалентность $h(f)$ и расслоение $p(f)$ — пунктированные.

Гомотопическим слоем $\text{hofib}(f)$ отображения f называется слой расслоения $p(f)$, то есть, $\text{hofib}(f) = p(f)^{-1}(y_0) = \{(x, \gamma) \mid f(x) = \gamma(0), \gamma(1) = y_0\} = X \times_Y P_1(Y)$, где $P_1(Y) = \{\gamma: I \rightarrow Y \mid \gamma(1) = y_0\}$.

Проверьте, что коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & X' & & \\ & \searrow h(f) & \downarrow f' & \searrow h(f) & \\ & & X \times_Y C(I, Y) & \xrightarrow{\quad} & X' \times_{Y'} C(I, Y') \\ & \swarrow p(f) & \downarrow p(f) & \swarrow p(f') & \\ Y & \xrightarrow{\quad} & Y' & & \end{array}$$

и естественному отображению $\text{hofib}(f) \rightarrow \text{hofib}(f')$.

б)* Докажите, что если в условиях предыдущего пункта отображения $X \rightarrow X'$ и $Y \rightarrow Y'$ являются гомотопическими эквивалентностями, то $\text{hofib}(f) \rightarrow \text{hofib}(f')$ тоже является гомотопической эквивалентностью.

в)* Докажите, что с точностью до гомотопической эквивалентности гомотопический слой не зависит от разложения отображения на гомотопическую эквивалентность и расслоение. То есть, если $f = p \circ h$ для некоторой гомотопической эквивалентности h и расслоения Гуревича p со слоем F , то $\text{hofib}(f) \simeq F$.

г) Докажите, что для пунктированного расслоения Гуревича $p: E \rightarrow B$ с выбранными отмеченными точками $b_0 \in B$, $e_0 \in F_{b_0} \subset E$ естественное вложение $\chi: F_{b_0} \hookrightarrow \text{hofib}(p)_{b_0} =$

$\{(e, \gamma) \in E \times C(I, B) \mid p(e) = \gamma(0), \gamma(1) = b_0\}$, $f \in F_{b_0} \mapsto (f, c_{b_0})$ является пунктированной гомотопической эквивалентностью.

14. Для отображения $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ (пунктированных пространств) рассмотрим разложение $f: X \xrightarrow[\simeq]{h(f)} X \times_Y C(I, Y) \xrightarrow{p(f)} Y$ в композицию гомотопической эквивалентности и расслоения.

Рассмотрим композицию $\pi(f): \text{hofib}(f) = X \times_Y P_1(Y) \hookrightarrow X \times_Y C(I, Y) \xrightarrow[\simeq]{pr_1} X$.

Кроме того, определено естественное вложение $\iota(f): \Omega Y \hookrightarrow \text{hofib}(f)$, $\omega \mapsto (*, \omega)$.

а) Проверьте, что отображение $\pi(f): \text{hofib}(f) \rightarrow X$ является пунктированным расслоением Гуревича со слоем (над x_0) ΩY . Таким образом, определено естественное вложение настоящего слоя в гомотопический $\chi: \Omega Y \hookrightarrow \text{hofib}(\pi(f))$, которое является (пунктированной) гомотопической эквивалентностью, согласно пункту г) задачи 13.

Докажите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & \xrightarrow{\iota(f)} & \text{hofib}(f) \\ \simeq \downarrow -\text{id} & & \simeq \downarrow \chi & & \parallel \\ \Omega X & \xrightarrow{\iota(\pi(f))} & \text{hofib}(\pi(f)) & \xrightarrow{\pi(\pi(f))} & \text{hofib}(f) \end{array}$$

в которой $-\text{id}: \Omega X \rightarrow \Omega X$ переводит петлю ω в обратную петлю $\bar{\omega}$, коммутативна с точностью до гомотопии.

Выведите, что, таким образом, для любого (пунктированного) отображения $f: X \rightarrow Y$ мы получаем последовательность

$$\cdots \rightarrow \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega \iota} \Omega \text{hofib}(f) \xrightarrow{\Omega \pi} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\iota} \text{hofib}(f) \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

в которой любые две последовательные стрелки с точностью до (пунктированной) гомотопической эквивалентности являются (пунктированным) расслоением Гуревича и вложением слоя!

Эта последовательность называется *расслоенной последовательностью Пуппе*.

В частности, из пункта а) задачи 12 мы получаем, что для любого пунктированного Z мы имеем точную последовательность пунктированных множеств

$$\cdots \rightarrow [Z, \Omega X]_{\bullet} \rightarrow [Z, \Omega Y]_{\bullet} \rightarrow [Z, \text{hofib}(f)]_{\bullet} \rightarrow [Z, X]_{\bullet} \rightarrow [Z, Y]_{\bullet}.$$

(конечно, кроме 3 последних членов это гомоморфизмы групп, а кроме 6 последних — абелевых групп).

б)* Докажите, что любого (пунктированного) отображения $f: X \rightarrow Y$ аналогично можно построить *корасслоенную последовательность Пуппе*

$$X \rightarrow Y \rightarrow \text{hocosfib}(f) = C(X) \cup_X Y \rightarrow \Sigma_{\bullet} X \rightarrow \Sigma_{\bullet} Y \rightarrow \Sigma_{\bullet} \text{hocosfib}(f) \rightarrow \Sigma_{\bullet}^2 X \rightarrow \cdots$$

в которой любые две последовательные стрелки с точностью до (пунктированной) гомотопической эквивалентности являются корасслоением и проекцией на факторпространство!

(здесь $\Sigma_{\bullet}$ — приведённая надстройка, а $\text{hocosfib}(f)$ — *гомотопический кослой*, то есть, кослой замены f на корасслоение: $f: X \hookrightarrow Cyl_{\bullet}(X) \cup_f Y \xrightarrow{\cong} Y$, где $Cyl_{\bullet}(X)$ — приведённый или пунктированный цилиндр $X \times I/x_0 \times I$, и $\text{hocosfib}(f) = (Cyl_{\bullet}(X) \cup_f Y)/X = C(X) \cup_f Y$, где $C(X)$ — приведённый конус $(X \times I)/(X \times 0 \cup x_0 \times I) = X \wedge I$).

В частности, из пункта б) задачи 12 мы получаем, что для любого пунктированного Z мы имеем точную последовательность пунктированных множеств (и (абелевых) групп)

$$\cdots \rightarrow [\Sigma_{\bullet} Y, Z]_{\bullet} \rightarrow [\text{hocosfib}(f), Z]_{\bullet} \rightarrow [Y, Z]_{\bullet} \rightarrow [X, Z]_{\bullet}.$$

15. а) Докажите, что для любой топологической группы G умножение $G \times G \rightarrow G$ является тривиальным расслоением со слоем G .

б) Докажите, что для отображений $f: X_1 \rightarrow Y_1$ и $g: X_2 \rightarrow Y_2$ выполнено $\text{hofib}(X_1 \times X_2 \xrightarrow{f \times g} Y_1 \times Y_2) \simeq \text{hofib}(f) \times \text{hofib}(g)$.

в) Докажите, что гомотопический слой отображения $S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$, слипляющего две различные точки $x, y \in S^1$ вместе, гомотопически эквивалентен счётному дискретному пространству.

г)* Докажите, что для отображений $f: X \rightarrow Z$ и $g: Y \rightarrow Z$ между клеточными пространствами выполнено $\text{hofib}(X \vee Y \xrightarrow{f \vee g} Z) \simeq \text{hofib}(f) \cup_{\Omega Z} \text{hofib}(g)$, где склейка производится по естественным вложениям $\Omega Z \hookrightarrow \text{hofib}(f)$ и $\Omega Z \hookrightarrow \text{hofib}(g)$.

Выведите, что гомотопический слой «схлопывания слагаемого Y в отмеченную точку» $X \vee Y \rightarrow X$ гомотопически эквивалентен $(Y \times \Omega X)/(* \times \Omega X)$, гомотопический слой «тождественного склеивания двух копий X в одну» $X \vee X \rightarrow X$ гомотопически эквивалентен $\Sigma \Omega X$, а гомотопический слой естественного вложения $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ гомотопически эквивалентен $\Omega X * \Omega Y$ (джойн ΩX и ΩY).

16. Рассмотрим коммутативную диаграмму клеточных пространств

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & B \end{array}$$

i — вложение клеточного подпространства, а p — расслоение Серра. Докажите, что суще-

ствует отображение $X \rightarrow E$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & B \end{array}, \text{ если}$$

а) i является гомотопической эквивалентностью;

б)* p является гомотопической эквивалентностью.

в)* Аналогично, если в диаграмме (общих топологических пространств)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & B \end{array} \quad i -$$

замкнутое корасслоение, а p — расслоение Гуревича, то отображение $X \rightarrow E$, делающее ком-

мутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & B \end{array}, \text{ существует, если одно из отображений } i \text{ или } p \text{ является}$$

гомотопической эквивалентностью.

В частности, так как для замкнутого корасслоения $A \subset X$ вложение $A \times I \cup X \times 0 \subset X \times I$ также является корасслоением и деформационным ретрактом, то мы получаем «свойство продолжения накрывающей гомотопии» для расслоений Гуревича: если задана гомотопия $X \times I \rightarrow B$, поднятие её начала $X \times 0 \rightarrow E$, а также поднятие всей гомотопии на $A: A \times I \rightarrow E$, то существует продолжение этого поднятия на всё $X: X \times I \rightarrow E$.

В частности, расслоение Гуревича удовлетворяет определению пунктированного расслоения Гуревича, если пунктированное пространство X обладает невырожденной отмеченной точкой.

г)* Выведите, что если $p: E \rightarrow B$ — расслоение Гуревича, а $A \rightarrow B$ — замкнутое корасслоение, то $p^{-1}(A) \subset E$ — тоже замкнутое корасслоение.