ТОПОЛОГИЯ–1
ЛИСТОЧЕК 1: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Проверьте, что для подмножества A топологического пространства X

а) $\operatorname{Int}(A) = \{x \in A \mid \exists U$ – открытое, т.ч. $x \in U \subset A\}$;

б) $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U$ – открытого, т.ч. $x \in U\ \exists y \in A \cap U\}$;

в) $\overline{A} = X - \operatorname{Int}(X - A)$ и $\operatorname{Int}(A) = X - \overline{X - A}$.

В частности, из пунктов а) и б) мы получаем, что множество открыто $\Leftrightarrow$ оно является объединением некоторых окрестностей всех своих точек (= содержит с каждой своей точкой какую-то её окрестность), и множество замкнуто $\Leftrightarrow$ оно содержит все свои предельные точки.

2. Докажите, что для подмножества $A \subset X$ метрического пространства (X, d) индуцированная топология на A совпадает с топологией, задаваемой индуцированной метрикой $d|_A$.

3. Проверьте, что отображение $f\colon X \to Y$ между топологическими пространствами X и Y непрерывно в точке $x_0 \in X \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. Докажите, что

а) семейство подмножеств $\mathfrak{B}$ множества X является базой некоторой топологии на $X \Leftrightarrow$ 1) объединение всех элементов $\mathfrak{B}$ совпадает с X и для любых U, $V \in \mathfrak{B}$ и 2) точки $x \in U \cap V$ существует $W \in \mathfrak{B}$ т.ч. $x \in W \subset U \cap V$;

б) если для каждой точки $x \in X$ дано (непустое) семейство подмножеств $\mathfrak{B}_x$ множества X, содержащих точку $x \in X$, то этот набор семейств подмножеств $\{\mathfrak{B}_x\}_{x \in X}$ образует базу окрестностей точек некоторой топологии на $X \Leftrightarrow$ 1) для любого элемента $U \in \mathfrak{B}_x$ и любой точки $y \in U$ существует $V \in \mathfrak{B}_y$ т.ч. $V \subset U$ и 2) для любых U, $V \in \mathfrak{B}_x$ существует $W \in \mathfrak{B}_x$ т.ч. $W \subset U \cap V$;

5. а) Пусть две топологии τ и τ' на множестве X определяются базами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Докажите, что $\tau \subset \tau' \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{B}\ \forall x \in U\ \exists U' \in \mathfrak{B}'$ т.ч. $x \in U' \subset U$.

б) Пусть две топологии τ и τ' на множестве X определяются базами в точках: $\mathfrak{B}_x$ и $\mathfrak{B}'_x$. Докажите, что $\tau \subset \tau' \Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall U \in \mathfrak{B}_x\ \exists U' \in \mathfrak{B}'_x$ т.ч. $U' \subset U$.

6. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ между топологическими пространствами X и Y непрерывно $\Leftrightarrow$ для некоторой фиксированной предбазы $\mathfrak{B}_Y$ топологии на Y прообраз каждого элемента из $\mathfrak{B}_Y$ при отображении f открыт в X.

7. а) Приведите пример непрерывной биекции между двумя топологическими пространствами, которая не является гомеоморфизмом.

б) Докажите, что любая непрерывная биекция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом.

8. В следующих пунктах «сравнить два подмножества одного множества» означает выяснить, всегда ли выполнено их равенство или одно из включений $\subset$ и $\supset$; если всегда выполнено включение, нужно это доказать, и если обратное включение выполнено не всегда (то есть, не всегда имеет место равенство), нужно привести пример, когда равенства нет; если же ни одно из включений не выполнено всегда, нужно привести два контрпримера, в которых не выполнено каждое из включений.

а) Для подпространства $A \subset X$ сравните A с $\overline{\mathrm{Int}A}$ и $\mathrm{Int}(\overline{A})$.

б) Что будет, если в предыдущем пункте рассматривать только открытые или замкнутые подмножества A?

в) Для двух подпространств A, $B \subset X$ сравните $\mathrm{Int}(A \cup B)$ с $\mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$ и $\mathrm{Int}(A \cap B)$ с $\mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$. Аналогично для замыканий вместо внутренностей.

г) Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и подпространства $A \subset X$ сравните $f(\overline{A})$ и $\overline{f(A)}$ и аналогично для внутренностей вместо замыканий.

д) Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и для подпространства $B \subset Y$ сравните $f^{-1}(\mathrm{Int}B)$ и $\mathrm{Int}f^{-1}(B)$ и аналогично для замыканий вместо внутренностей.

9. Докажите, что следующие пары пространств гомеоморфны:

а) открытый шар и открытый куб в $\mathbb{R}^n$;

б) замкнутый шар и замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$;

в) открытый шар в $\mathbb{R}^n$ и всё $\mathbb{R}^n$;

г) любые два замкнутых ограниченных и выпуклых множества в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью;

д) любые два открытых выпуклых множества в $\mathbb{R}^n$.

е) Верно ли это для любых двух неограниченных замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью?

10. Докажите, что дополнение сферы до одной точки $S^n - x$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

11. а) Рассмотрим два набора из k различных точек в $\mathbb{R}^n$: $X = \{x_1, \dots x_k\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$. Докажите, что их дополнения $\mathbb{R}^n - X$ и $\mathbb{R}^n - Y$ гомеоморфны.

б) Верно ли это для счётных наборов точек?

12. Подмножество $A \subset X$ топологического пространства X называется *всюду плотным*, если $\overline{A} = X$.

а) Докажите, что образ всюду плотного множества при непрерывном отображении f всюду плотен в образе f;

б) Приведите пример двух различных непрерывных отображений, равных на всюду плотном подмножестве.

в) Верно ли, что прообраз всюду плотного множества при непрерывном сюръективном отображении всюду плотен?

13. а) Приведите пример такого незамкнутого подмножества $A \subset X$ в топологическом пространстве X, что индуцированная топология на A дискретна.

б) Докажите, что если замыкание $\overline{A}$ дискретно, то на самом деле $A = \overline{A}$ — замкнуто и дискретно.

в) Приведите пример такого недискретного подмножества A, что внутренность $\mathrm{Int}(A)$ дискретна.

14. а) Приведите пример трёх подмножеств A, B, C на прямой $\mathbb{R}$, таких что $\partial A = \partial B = \partial C$ (напомним, что *границей* подмножества A называется разность $\partial A = \overline{A} - \mathrm{Int}A$).

б) Приведите пример двух ограниченных открытых подмножества A и B на плоскости, таких что $\partial A = \partial B$.