

Линейные преобразования

Задача 6.1. Докажите, что два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Задача 6.2. Определите матрицу линейного отображения $\mathcal{A}: V \rightarrow W$ по отношению к базисам в V и W и выведите закон изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Задача 6.3. Пусть k -мерное подпространство W в n -мерном евклидовом пространстве V задано как линейная оболочка векторов, $W = \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \rangle$. Пусть B — матрица $n \times k$, составленная из столбцов координат векторов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ в некотором ортонормированном базисе. Найдите матрицу ортогонального проектора $\text{pr}_W: V \rightarrow V$, $\mathbf{v} \mapsto \text{pr}_W \mathbf{v}$, в том же базисе.

Задача 6.4. В стандартном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найдите матрицы а) ортогонального проектора и б) отражения относительно подпространства $\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

в), г) То же для подпространства, заданного системой $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Задача 6.5. Верно ли, что для любого оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве свойство $\mathcal{A}(W) \subset W$ влечёт $\mathcal{A}(W^\perp) \subset W^\perp$?

Задача 6.6. Найдите канонический вид и соответствующий ортонормированный базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\text{а) } \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.7. Докажите, что отображение

$$\alpha: Sp(1) \xrightarrow{q \mapsto (x \mapsto qxq^{-1})} SO(\mathbb{H}_0) = SO(3)$$

является сюръективным гомоморфизмом с ядром $\{-1, 1\}$.

Задача 6.8. Докажите, что отображение

$$\alpha: Sp(1) \times Sp(1) \xrightarrow{(q_1, q_2) \mapsto (x \mapsto q_1 x q_2^{-1})} SO(\mathbb{H}) = SO(4)$$

является сюръективным гомоморфизмом с ядром $\{-1, 1\}$.

Задача 6.9. Пусть V — конечномерное евклидово пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ — оператор.

а) Докажите, что существует единственный сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*$ со свойством $\langle \mathcal{A}v, w \rangle = \langle v, \mathcal{A}^*w \rangle$, $v, w \in V$.

б) Пусть в V задан базис. Выразите матрицу оператора $\mathcal{A}^*$ через матрицу $\mathcal{A}$ и матрицу Грама.

в) Оператор $\mathcal{A}$ называется *симметрическим*, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Опишите все симметрические ортогональные операторы.

Задача 6.10. Определим *специальную унитарную группу* $SU(n)$ как группу комплексных унитарных $n \times n$ -матриц с определителем 1, т. е. матриц C , удовлетворяющих соотношениям $\overline{C}^t C = E$, $\det C = 1$. Докажите изоморфизмы групп:

а) $SU(2)/\{1, -1\} \cong Sp(1)/\{1, -1\} \cong SO(3)$; б) $(SU(2) \times SU(2))/\{1, -1\} \cong SO(4)$.