Листок 6, 20 октября 2025 г.

Задача 1. Докажите, что модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного. Приведите пример проективного, но не свободного модуля.

Задача 2. Докажите, что $\sum P_i$ проективен тогда и только тогда, когда каждый P_i проективен. Докажите, что ΠI_i инъективен тогда и только тогда, когда каждый I_i инъективен.

Задача 3. Критерий инъективности Бэра. A-модуль M инъективен тогда и только тогда, когда для любого левого идеала $I \subset A$ выполнено, что гомоморфизм $I \to M$ продолжается до гомоморфизма $A \to M$.

Задача 4. Пусть A – кольцо главных идеалов без делителей нуля. Докажите, что модуль M над кольцом A инъективен тогда и только тогда, когда он делим, то есть для любых $m \in M$ и $0 \neq a \in A$ существует $n \in M$ такое, что $m = an$. Докажите, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективные Z-модули.

Задача 5. Докажите, что расширения A-модуля M с помощью N биективны элементам группы $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$.

Задача 6. Пусть даны точные последовательности

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0, \qquad 0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0.$$

Докажите, что они индуцирует длинные точные последовательности для любых M, N:

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_1(M_3, N) \to \mathrm{Tor}_0(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_0(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_0(M_3, N) \to 0,$$

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_1(M, N_3) \to \mathrm{Tor}_0(M, N_1) \to \mathrm{Tor}_0(M, N_2) \to \mathrm{Tor}_0(M, N_3) \to 0.$$

Задача 7. Пусть X — топологическое пространство, а F — конечнопорожденная абелева группа. Постройте точные последовательности

(a) $0 \to \mathbb{Z}^{\oplus a} \to \mathbb{Z}^{\oplus b} \to F \to 0$,

(b) $0 \to C_\bullet(X)^{\oplus a} \to C_\bullet(X)^{\oplus b} \to C_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F \to 0$,

(c) (формула универсальных коэффициентов)

$$0 \to H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} F \to H_i(X, F) \to \mathrm{Tor}_1(H_{i-1}(X, \mathbb{Z}), F) \to 0,$$

где

$$\mathrm{Tor}_1(H_{i-1}(X, \mathbb{Z}), F) := \mathrm{Ker}(H_{i-1}(X, \mathbb{Z})^{\oplus a} \to H_{i-1}(X, \mathbb{Z})^{\oplus b}),$$

(d)

$$H_i(X, \mathbb{Q}) = H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Задача 8. Докажите, что $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G/[G,G]$.

Задача 9. Докажите, что $H^1(G,\mathbb{Z}) = (G/[G,G])^*$.

Задача 10. Пусть дана точная последовательность

$$0 \to M \to P_0 \to P_1 \to \dots$$

в которой $H_i(G,P_n) = 0$ при $i > 0$ и всех n (ацикличная резольвента). Докажите, что $H_i(G,M) \cong H_i(P_{\bullet G})$.

Задача 11. Пусть $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, а M — G-модуль. Докажите, что

1. $H_i(G,M[G]) = 0$ при $i > 0$ и $H_0(G,M[G]) = M$,
2. $0 \to M \to M[G] \xrightarrow{1-t} M[G] \xrightarrow{N} M[G] \xrightarrow{1-t} \dots$ — ацикличная резольвента,
3. Вычислите $H^i(G,M)$.

Задача 12. Множество расширений группы G с помощью абелевой группы N, индуцирующих данное действие группы G на N совпадает с группой $\mathrm{H}^2(G,N)$.