

#### 4. ЛЕКЦИЯ 4. ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ.

4.1. **Формальные степенные ряды.** Пусть  $R$  – коммутативное кольцо с единицей.

**Определение 4.1.** Кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами в  $R$  это множество

$$R[[x]] := \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \mid a_i \in R \right\}$$

с операциями

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n;$$

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) := \left( \sum_{n \geq 0} c_n x^n \right), \quad \text{где} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Ясно, что  $R[[x]]$  – коммутативное кольцо с единицей.

**Определение 4.2.**

$$R[[x, y]] := (R[[x]])[[y]]$$

Далее будем рассматривать только  $\mathbb{k}[[x]]$ , где  $\mathbb{k}$  – поле. Пусть  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ,  $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in \mathbb{k}[[x]]$  и попробуем определить ряд  $f(g(x))$ . Уже младший коэффициент ряда (при  $x^0$ ) имеет вид  $\sum_{k=0}^{\infty} b_0 a_k$ , то есть не определен. Определим подкольцо

$$N = \left\{ g = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in \mathbb{k}[[x]] \mid b_0 = 0 \right\}.$$

В этом случае, композиция  $f(g(x))$  корректно определена.

4.2. **Обратимые элементы и деление с остатком.** Можно ли в  $\mathbb{k}[[x]]$  делить с остатком?

**Лемма 4.3.**  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  лежит в  $\mathbb{k}[[x]]^\times$  тогда и только тогда когда  $a_0 \neq 0$ .

*Доказательство.* Если

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = 1,$$

то необходимо

$$a_0 b_0 = 1 \quad (\text{коэффициент при } x^0)$$

$$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \quad (\text{коэффициент при } x^1)$$

...

$$\sum a_k b_{n-k} = 0 \quad (\text{коэффициент при } x^n)$$

Если  $a_0 \neq 0$ , то система имеет решения, а значит элемент обратим. Если  $a_0 = 0$ , то решений нет уже у первого уравнения.  $\square$

**Пример 4.4.** Пусть  $f(x) = 1 - x$ . Элемент  $f$  – обратим и если  $(1 - x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ , то решая систему уравнение получаем  $b_i = 1 \ \forall i$ , а значит  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$  – сродни формуле суммы геометрической прогрессии.

Для деления с остатком определим  $\deg \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \min_i a_i \neq 0$ . Тогда для любых  $f, g \in \mathbb{k}[[x]]$  существуют  $q, r \in \mathbb{k}[[x]]$  такие, что

$$f = qg + r \quad \deg f < \deg g$$

Действительно, если  $\deg g > \deg f$ , то  $q = 0, r = f$ . Если же  $\deg f \geq \deg g$ , то пусть  $f = x^k f_1, g = x^l g_1, \deg f_1 = \deg g_1 = 0$ . Тогда  $f = g(x^{k-l} f_1 g_1^{-1})$ . Таким образом, в

$$\mathbb{k}[[x]]$$

возможно деление с остатком, а значит в нем есть НОД, алгоритм Евклида, лемма Евклида и, как следствие, факториальность. Разложение  $f \in \mathbb{k}[[x]]$  выглядит как  $f = x^k f_1, \deg f_1 = 0$ . Единственный простой элемент – это  $x$ .

#### 4.3. Производная и интеграл.

**Определение 4.5.** Производной

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

называется ряд

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

Можно показать, что  $f'(x) = \left( \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right)_{t=0}$ , где  $f(x+t) \in \mathbb{k}[[x, t]]$ .

Несложно доказать, что все правила дифференцирования верны в этом случае. Например, проверим, что  $(fg)' = f'g + fg'$ . Для этого посчитаем коэффициент при  $x^n$  в левой и правой части. Слева он равен  $(n+1)(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k})$ . Справа

$$\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k (n-k+1) b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k (n-k+1) b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1) a_k b_{n-k}$$

**Пример 4.6.** Вычислим явно  $\frac{1}{(1-x)^k}$ .

Заметим, что  $\left( \frac{1}{1-x} \right)^{(k-1)} = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$ , значит,

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n \geq k-1} n(n-1) \dots (n-k+2) x^{n-k+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

**Определение 4.7.** Первообразной

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

называется ряд

$$\int f = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C, C \in \mathbb{k}$$

Ясно, что операции дифференцирования и интегрирования взаимнообратны (быть может, с точностью до константы).

**Определение 4.8.**  $\ln(1+x) := \int \frac{1}{1+x} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

Определим  $U = \{\sum_{k \geq 0} a_k x^k \mid a_0 = 1\}$ . Ясно, что  $U$  – абелева группа относительно умножения рядов.

Более того, если  $g(x) \in U$ , то корректно определен ряд  $\ln g(x) = \ln(1 + (g(x) - 1))$ . При этом  $\ln g(x) \in N$ .

**Предложение 4.9.** (1)  $\ln : (U, \cdot) \rightarrow (N, +)$  – изоморфизм абелевых групп.

(2) Пусть  $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Тогда  $\ln^{-1} = \exp$ .

*Доказательство.*

**Лемма 4.10.** Следующие условия на  $f, g \in U$  эквивалентны:  $f = g$ ,  $f' = g'$ ,  $\ln f = \ln g$ ,  $(\ln f)' = (\ln g)'$ .

*Доказательство.* 1 и 2 очевидно, эквивалентны, а, значит,  $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4)$ . Докажем,  $(4 \rightarrow 1)$ . Заметим, что

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$$

то есть

$$\frac{f'g - g'f}{fg} = \frac{g}{f} \left( \frac{f}{g} \right)'$$

откуда  $f = g$ . □

- $\ln e^f = f$  для любого  $f \in N$ , так как  $(\ln e^f)' = \frac{e^f f'}{e^f} = f'$ .
  - $e^{\ln f} = f$  для любого  $f \in N$ , так как  $\frac{e^{\ln f} f'}{e^{\ln f}} = \frac{f'}{f}$ .
  - $\ln(fg) = \ln f + \ln g$ , так как  $\ln(fg)' = (\ln f)' + (\ln g)'$ .
- 

**Определение 4.11.**  $(1+x)^\alpha := \exp(\ln(1+x)\alpha)$ .

Ясно, что для любого  $f \in U$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  определён ряд  $u^\alpha$ . Несложно проверить, что при этом выполнены все стандартные свойства степени, например,  $u^{a+\beta} = u^a + u^\beta$ . Для явного вычисления ряда  $(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  заметим, что

$$\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln(1+x)^\alpha)' = \alpha \ln(1+x)' = \frac{\alpha}{1+x}$$

Отсюда

$$(1+x)((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^\alpha,$$

откуда

$$a_k = \frac{\alpha - (k-1)}{k} a_{k-1},$$

то есть

$$a_k = \frac{(\alpha - k + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - 1)\alpha}{k!}.$$

и

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Заметим, что при  $\alpha = n$  получаем

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k}.$$

**4.4. Линейно-рекуррентные последовательности.** Предположим, что бесконечная последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  задана рекуррентно, то есть

$$a_k + b_1 a_{k-1} + \dots + b_k a_0 = 0$$

и значения  $a_0, \dots, a_{k-1}$  определены. Как получить явную формулу для этой последовательности?

**Определение 4.12.** Производящей функцией бесконечной последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  называется формальный степенной ряд  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

Рассмотрим пример  $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ ,  $a_0 = a_1 = 1$  — числа Фибоначчи и пусть  $F(x)$  — производящая функция нашей последовательности. Тогда несложно видеть, что

$$F(x)(1 - x - x^2) = x,$$

а значит,

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Корни многочлена  $1 - x - x^2$  это  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Далее,  $\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - x_1 x} + \frac{1}{1 - x_2 x} \right)$  откуда получаем, что

$$a_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}$$

В общем случае, если  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  производящая функция рекуррентно заданной последовательности, то

$F(x)(1 + b_1 x + \dots + b_k x^k) = 1 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ , а любую рациональную функцию можно разложить в ряд, используя разложение в простейшие дроби, см. следующую лекцию.