Векторные пространства - 2, метод Гаусса.

Задача 1. а) Найдите базис суммы и пересечения подпространств $\mathbb{Q}^5$
$$U = \operatorname{span}\langle (2,1,0,3,0),(3,1,0,2,0)\rangle, \quad V = \operatorname{span}\langle (1,1,1,1,1),(2,3,1,4,1),(3,4,2,5,2)\rangle.$$

б) Найдите базис линейной оболочки строк и столбцов матрицы и её ранг: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

в) Выясните, является ли сумма подпространств $U, V \subset \mathbb{Q}^4$ прямой, и, если да, найдите проекции стандартных базисных векторов $\mathbb{Q}^4$ на каждое из подпространств вдоль другого, где
$$U = \operatorname{span}\langle (1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle, \quad V = \operatorname{span}\langle (-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\rangle.$$

г) Найдите матрицу обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2. Напишите матрицу линейного отображения D из векторного пространства многочленов степени не выше n в себя в базисе $1, x, \ldots, x^n$ если
а) D — оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$;
б) D — оператор сдвига $D_a\colon f(x) \mapsto f(x+a)$.

в) Проверьте явно, что произведение матриц операторов сдвига D_a и D_b на числа a и b есть матрица сдвига на сумму D_{a+b}.

Задача 3. а) Напишите матрицы поворота вокруг прямых, натянутых на стандартный базис $\mathbb{R}^3$, в этом же базисе.

Задача 4. Назовем два набора подпространств $(V_1, \ldots, V_k)$, $(V_1', \ldots, V_k')$ в заданном n-мерном пространстве V *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $A\colon V \to V$, что $A(V_i) = V_i'$.

а) Докажите, что числа $d_{i_1 \ldots i_s} := \dim V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_s}$ являются инвариантами (то есть одинаковы у эквивалентных наборов).

б) Существуют ли ещё инварианты принадлежащие $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$? Например, является ли инвариантом $\dim(V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2)$? Выражается ли он через уже описанные?

Существует ли конечное число инвариантов однозначно определяющих набор из **в)** одного; **г)** двух; **д*)** трёх **е**)** четырёх? подпространств с точностью до эквивалентности? Если да, то предъявите набор инвариантов явно.

Задача 5. [Разложение Брюа] Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, и $B \subseteq GL_n(\Bbbk)$ — множество верхнетреугольных обратимых матриц. Пусть $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ — биекция, и $A_\sigma \in GL_n(\Bbbk)$ — матрица линейного отображения, заданного как $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$, где e_i — стандартный базис $\Bbbk^n$.

а) Опишите явно матрицу A_σ для любой биекции σ.

б) Докажите, что $GL_n(\Bbbk) = \sqcup_\sigma B A_\sigma B$, где $BA_\sigma B = \{x A_\sigma y \mid x, y \in B\}$. *Указание. Метод Гаусса.*

Задача 6. Рассмотрим последовательность векторных пространств и отображений между ними:
$$0 \overset{d_{-1}}{\to} V_0 \overset{d_0}{\to} V_1 \overset{d_2}{\to} \ldots \overset{d_{n-1}}{\to} V_n \overset{d_n}{\to} 0$$
Обозначим $Z_i := \ker(d_i)$ и $B_i := \operatorname{im}(d_{i-1})$ подпространства в V_i. Докажите равенства **а)** $\left(\sum\limits_{i=0}^n \dim Z_i\right) - \left(\sum\limits_{i=0}^n \dim(V_i/B_i)\right) = \dim V_0 - \dim V_n$; **б)** $\sum\limits_{i=0}^n (-1)^i \dim V_i = \sum\limits_{i=0}^n (-1)^i \dim H_i$, при условии $d_{i+1} \circ d_i = 0$ $\forall i$. В данной ситуации последовательность (6) называется *цепным комплексом*, пространства $H_i := Z_i/B_i$ его *гомологиями*, а описанная знакопеременная сумма *эйлеровой характеристикой*.