ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОЧЕК 4: ГОМОЛОГИИ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Любое непрерывное отображение $f\colon S^n \to S^n$ индуцирует отображение $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Если выбрать образующую в этих гомологиях, мы получим изоморфизм $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, и следовательно, гомоморфизм групп $f_*\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Любой такой гомоморфизм есть умножение на целое число. Оно называется *степенью* отображения f и обозначается $\deg f$.
а) Докажите, что отображение $\deg\colon [S^n, S^n] \to \mathbb{Z}$ является биекцией.
б) Проверьте, что отображение $\pi_n(S^n) = [S^n, S^n]_\bullet \to [S^n, S^n]$, забывающее отмеченные точки, является биекцией. В частности, из пункта а) получаем биекцию $\deg\colon \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$.
в) Докажите, что $\deg\colon \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ — изоморфизм групп.
г) Докажите, что $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. Выведите, что $f\colon S^n \to S^n$ — гомотопическая эквивалентность $\iff$ $\deg f = \pm 1$. Проверьте, что $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$.
д) Рассмотрим линейный изоморфизм $A \cdot \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Представим $\mathbb{R}^n$ как S^n без одной точки. Докажите, что отображение A продолжается единственным образом до гомеоморфизма $\widehat{A}\colon S^n \to S^n$ и найдите степень $\widehat{A}$ в терминах A. Найдите степень антиподального отображения $x \mapsto -x$.
Аналогично, A индуцирует отображение $A\colon \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$. Найдите степень этого отображения на гомологиях $H_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$.
е) Убедитесь, что степень несюръективного отображения равна нулю. Приведите пример сюръективного отображения нулевой степени.
ё) Докажите, что любое непрерывное отображение $\mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ имеет неподвижную точку. Приведите пример непрерывного отображения $\mathbb{R}P^{2n+1} \to \mathbb{R}P^{2n+1}$ без неподвижных точек.
ж) Приведите пример отображения $\mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ без неподвижных точек.

На самом деле из *теоремы Лефшеца о неподвижной точке* следует, что у любого отображения $\mathbb{C}P^{2n} \to \mathbb{C}P^{2n}$ есть неподвижные точки.

з) Докажите, что если $f(x) \neq -g(x)$ для всех x, то f гомотопно g. В частности, если $f(x) \neq -x$, то $f \sim \mathrm{id}$, и аналогично, если у f нет неподвижных точек, то оно гомотопно антиподальному отображению $-\mathrm{id}$.
и) Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное всюду ненулевое касательное векторное поле $\iff$ n нечётно.
к) Рассмотрим комплексный многочлен $f(z)$ и задаваемое им отображение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Докажите, что это отображение продолжается до отображения $\widehat{f}\colon S^2 \to S^2$ и найдите его степень.
л) Докажите, что любое отображение $f\colon S^n \to S^n$ гомотопно отображению, имеющему хотя бы одну неподвижную точку.
м) Пусть для отображения $f\colon S^n \to S^n$ существует такое открытое множество $V \subset S^n$, что его прообраз $f^{-1}(V)$ состоит из конечного числа непересекающихся открытых множеств $U_1, \ldots, U_k$, причём ограничение f на каждое из них даёт гомеоморфизм $f|_{U_i}\colon U_i \xrightarrow{\cong} V$. Выберем точку $q \in V$. Тогда у неё тоже ровно k прообразов $p_i \in U_i$. Мы имеем изоморфизм вырезания $H_{n-1}(U_i, U_i - p_i) \cong H_n(S^n, S^n - p_i)$ и изоморфизм $H_n(S^n, S^n - p_i) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ из длинной точной последовательности пары $(S^n, S^n - p_i)$ (так как $S^n - p_i$ — стягиваемо). Аналогично, $H_n(V, V - q) \cong \mathbb{Z}$, и мы получаем гомоморфизмы $(f|_{U_i})_*\colon \mathbb{Z} = H_n(U_i, U_i - p_i) \to H_n(V, V - q) = \mathbb{Z}$, то есть, умножения на целые числа $\deg_{p_i} f$ — *локальные степени* отображения f. Проверьте, что в таком случае $\deg_{p_i} f = \pm 1$ и докажите, что $\deg f = \sum\limits_{p_i \in f^{-1}(q)} \deg_{p_i} f$.
н) Докажите, что если группа G свободно действует на S^{2n}, то $G = 0$ или $\mathbb{Z}/2$. Приведите пример, свободного действия любой $\mathbb{Z}/m$ на любой нечётномерной сфере.

о) Докажите, что чётное отображение $f\colon S^n \to S^n$ (т.е. $f(x) = f(-x)$) всегда имеет нулевую степень, когда n чётно, и всегда имеет чётную степень, когда n нечётно. Приведите пример чётного отображения $S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ произвольной чётной степени.
п) Докажите, что не существует такого X, что $\mathbb{R}^{2n+1}$ гомеоморфно $X \times X$.

2. *(Вещественной) алгеброй с делением* называется конечномерное вещественное векторное пространство A, снабжённое $\mathbb{R}$-билинейным умножением $A \times A \to A$, относительно которого A не имеет делителей нуля (т.е. $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0$). Проверьте, что это равносильно тому, что для любых элементов $a \neq 0$ и b существует единственный элемент $x \in A$, такой что $ax = b$ («можно делить на ненулевые элементы слева»), и аналогично для деления справа.
а) Докажите, что единственными алгебрами с делением, которые при этом ещё ассоциативны, коммутативны и обладают единицей, являются только $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (с обычным умножением).
б) Докажите, что если алгебра с делением A имеет размерность больше 1, то $\dim A$ чётна.

На самом деле, единственными алгебрами с делением являются вещественные и комплексные числа, кватернионы и октавы.

3. Для клеточного отображения $f\colon X \to Y$ между клеточными пространствами постройте морфизм клеточных цепных комплексов $f^{CW}\colon C_*^{CW}(X) \to C_*^{CW}(Y)$, индуцирующий f_* на гомологиях.

4. Пусть $E \to S^n$ — локально тривиальное расслоение со слоем F. Докажите, что имеет место длинная точная *последовательность Вана*

$$\cdots \to H_{i-n+1}(F) \to H_i(F) \xrightarrow{j_*} H_i(E) \to H_{i-n}(F) \to \cdots$$

где $j\colon F \hookrightarrow E$ — включение слоя.

5. Для расслоения $E \to B$ со слоем F мы имеем действие монодромии $\pi_1(B) \to [F, F]$, и следовательно действие $\pi_1(B) \curvearrowright H_*(F)$.
Представьте бутылку Клейна как пространство расслоения над окружностью и найдите действие монодромии на её гомологиях.

6. Докажите, что для любой точки x конечного симплициального комплекса K группы гомологий $H_i(K, K - x)$ конечно порождены. Приведите пример конечного клеточного пространства X и точки $x \in X$ группы гомологий $H_i(X, X - x)$ не конечно порождены.

7. а) Пусть $X \subset S^n$ — корасслоение, причём X гомеоморфно замкнутому шару. Докажите, что тогда $\widetilde{H}_i(S^n - X) = 0$. Выведите, что если $X \subset S^n$ — корасслоение и X гомеоморфно сфере S^k при $k < n$, то $\widetilde{H}_i(S^n - X) \cong \widetilde{H}_{n-i-1}(S^k)$ (это частный случай так называемой *двойственности Александера*).
б) Докажите, что для корасслоения $X \subset S^n$ изоморфизмы $\widetilde{H}_i(S^n - X) \cong \widetilde{H}_{n-i-1}(X)$ имеют место и если X гомеоморфно нескольким шарам или сферам, или букету нескольких сфер.
в)* Докажите, что условие, что $X \subset S^n$ — корасслоение, в предыдущих пунктах можно убрать. То есть, это верно для любых топологических вложений дисков, сфер и букетов сфер в сферу.
В частности, при $X \cong S^{n-1}$ мы получаем, что $S^n - X$ имеет ровно две компоненты связности (*теорема Жордана*) и гомологии этих компонент тривиальны. Пример *сферы Александера* показывает, что компоненты $S^n - X$ могут не быть стягиваемыми. Аналогично, например, для зацепления L из n компонент в S^3 мы получаем, что (приведённые) гомологии дополнения $S^3 - L$ не равны нулю только в размерности 1 и изоморфны $H_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}^n$, то есть, вовсе не зависят от вида зацепления. В то же время фундаментальная группа $\pi_1(S^3 - L)$ сильно зависит от «заузленности» зацепления L.
г)* Докажите, что для любого топологического вложения $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ среди двух компонент связности дополнения $S^n - i(S^{n-1})$ ровно одна неограниченна, а образ $i(S^{n-1})$ является в точности границей каждой из компонент.

8. Найдите гомологии дополнения $S^3 - M$, где M — лента Мёбиуса, стандартно вложенная в $\mathbb{R}^3 \subset S^3$.

9.* Докажите, что если $A \subset \mathbb{R}^n$ и A гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$, то A открыто. Выведите, что не существует топологических вложений $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ при $m > n$.

10.* Докажите, что для открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ выполнено $H_i(U) = 0$ при $i \geqslant n$.

11. Докажите, что для связного клеточного пространства X с $H_1(X) = 0$ существует такое односвязное клеточное пространство X_+ и отображение $X \to X_+$, индуцирующее изоморфизмы на всех гомологиях (*плюс-конструкция*).
Более общо, докажите, что для любой нормальной подгруппы $N \subset \pi_1(X)$, удовлетворяющей $[N, N] = N$, существует такое клеточное пространство X_+ и отображение $X \to X_+$, индуцирующее изоморфизмы на всех гомологиях и отображение $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/N = \pi_1(X_+)$ на фундаментальных группах.

12. Напомним, что для последовательности гомоморфизмов абелевых групп $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$ её копредел есть $\operatorname{colim} A_n := (\bigoplus A_n)/N$, где N — подгруппа, порождённая всевозможными разностями $a - f_k(a)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $a \in A_k \subset \bigoplus A_n$ и $f_k(a) \in A_{k+1} \subset \bigoplus A_n$.
а) Рассмотрим гомоморфизм $\delta\colon \bigoplus A_n \to \bigoplus A_n$, $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2 - f_1(a_1), a_3 - f_2(a_2), \ldots)$. Убедитесь, что $\ker \delta = 0$ и $\operatorname{coker} \delta = \operatorname{colim} A_n$, то есть, имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \bigoplus A_n \xrightarrow{\delta} \bigoplus A_n \to \operatorname{colim} A_n \to 0$$

Имеются естественные отображения $\iota_k\colon A_k \hookrightarrow \bigoplus A_n \twoheadrightarrow \operatorname{colim} A_n$.
Проверьте, что гомоморфизм $\operatorname{colim} A_n \to B$ — то же самое, что и набор гомоморфизмов $A_n \to B$, таких что треугольники
$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r] \arrow[dr] & A_{n+1} \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$
коммутативны.
Покажите, что если отображения $A_n \to A_{n+1}$ являются изоморфизмами при $n \geqslant N$, то отображение $\iota_N\colon A_N \to \operatorname{colim} A_n$ является изоморфизмом.
б) Убедитесь, что colim — функтор из категории последовательностей абелевых групп в абелевы группы, и докажите, что коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

с точными столбцами индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{colim} A_n \to \operatorname{colim} B_n \to \operatorname{colim} C_n \to 0$$

в) Докажите, что если для фильтрации $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ пространства $X = \bigcup X_n$ выполнено, что для любого компакта $K \subset X$ существует такое N, что $K \subset X_N$, то гомоморфизмы $\pi_i(X_n) \to \pi_i(X)$, индуцированные включениями, задают изоморфизм $\operatorname{colim} \pi_i(X_n) \xrightarrow{\cong} \pi_i(X)$. (Для $i = 1$ в определении копредела последовательности не обязательно абелевых групп нужно заменить прямую сумму на свободное произведение, а N — на нормальную подгруппу, порождённую произведениями $a^{-1} f_k(a)$.)

Убедитесь, что это условие на фильтрацию выполнено в случае, когда все пространства X_n являются T_1-пространствами, а топология на X совпадает с топологией копредела.

г) Аналогично для последовательности гомоморфизмов групп $A_0 \xleftarrow{f_0} A_1 \xleftarrow{f_1} A_2 \xleftarrow{f_2} \cdots$ определён её предел $\lim A_n = \{(a_n) \in \prod\limits_{n\geqslant 0} A_n \mid a_n = f_n(a_{n+1})\}$

В случае абелевых групп можно также рассмотреть гомоморфизм $\delta\colon \prod A_n \to \prod A_n$, $(a_n) \mapsto (a_n - f_n(a_{n+1}))$. Тогда $\ker\delta = \lim A_n$. В этом случае можно также определить *первый (правый) производный функтор* функтора предела $\lim^1 A_n := \operatorname{coker}\delta = (\prod A_n)/\operatorname{im}\delta$. То есть, имеет место точная последовательность абелевых групп

$$0 \to \lim A_n \to \prod A_n \xrightarrow{\delta} \prod A_n \to \lim{}^1 A_n \to 0$$

Имеются естественные отображения $\rho_k\colon \lim A_n \hookrightarrow \prod A_n \twoheadrightarrow A_k$.
Убедитесь, что $\lim$ и $\lim^1$ — функторы из категории последовательностей абелевых групп в абелевы группы.
Проверьте, что гомоморфизм $B \to \lim A_n$ — то же самое, что и набор гомоморфизмов $B \to A_n$, таких что треугольники
$$\begin{tikzcd} A_n & A_{n+1} \arrow[l] \\ & B \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$
коммутативны. Покажите, что если отображения $A_n \leftarrow A_{n+1}$ являются изоморфизмами при $n \geqslant N$, то естественное отображение $\rho_N\colon \lim A_n \to A_N$ является изоморфизмом.

д)* Говорят, что последовательность $A_0 \xleftarrow{f_0} A_1 \xleftarrow{f_1} A_2 \xleftarrow{f_2} \cdots$ удовлетворяет *условию Миттаг-Леффлера*, если для любого k существует такое $N \geqslant k$, что для всех $n \geqslant N$ образы композиций $A_k \leftarrow A_{k+1} \leftarrow \cdots \leftarrow A_n$ не зависят от n (то есть, с ростом n эти образы в A_k рано или поздно стабилизируются). Проверьте, что это условие выполнено, если начиная с некоторого номера N все отображения $A_n \leftarrow A_{n+1}$ сюръективны, или если все группы A_n конечны, или если все группы A_n — конечномерные векторные пространства.
Докажите, что если последовательность A_n удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера, то $\lim^1 A_n = 0$.
Приведите пример последовательности A_n с $\lim^1 A_n \neq 0$.

е)* Докажите, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ A_0 \arrow[d] & A_1 \arrow[l] \arrow[d] & A_2 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\ B_0 \arrow[d] & B_1 \arrow[l] \arrow[d] & B_2 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\ C_0 \arrow[d] & C_1 \arrow[l] \arrow[d] & C_2 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\ 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

с точными столбцами индуцирует точную последовательность

$$0 \to \lim A_n \to \lim B_n \to \lim C_n \to \lim{}^1 A_n \to \lim{}^1 B_n \to \lim{}^1 C_n \to 0$$

ё)* Докажите, что если имеется последовательность расслоений $X_0 \xleftarrow{p_0} X_1 \xleftarrow{p_1} X_2 \xleftarrow{p_2} \cdots$, то для любого i мы получаем последовательности групп $\pi_i(X_0) \leftarrow \pi_i(X_1) \leftarrow \cdots$ и имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to \lim{}^1 \pi_{i+1}(X_n) \to \pi_i(\lim X_n) \to \lim \pi_i(X_n) \to 0,$$

где $\lim X_n = \{(x_n) \in \prod X_n \mid x_n = p_n(x_{n+1})\} \subset \prod X_n$.

13.* Рассмотрим последовательность функторов h_n, $n \in \mathbb{Z}$ из категории пар клеточных пространств в категорию абелевых групп (при этом допускаются пары $(X, \varnothing)$ и $h_n(X, \varnothing)$

обозначаются просто $h_n(X)$). Она называется *неприведённой теорией гомологий*, если заданы естественные преобразования $\partial_n\colon h_n(X,A)\to h_{n-1}(A)$ и выполнены следующие условия:

(1) (*аксиома гомотопии*) для гомотопных отображений $f\sim g\colon (X,A)\to(Y,B)$ отображения $f_*\colon h_n(X,A)\to h_n(Y,B)$ и $g_*\colon h_n(X,A)\to h_n(Y,B)$ совпадают;

(2) (*аксиома точности*) последовательность абелевых групп

$$\cdots\to h_n(A)\xrightarrow{i_*}h_n(X)\xrightarrow{j_*}h_n(X,A)\xrightarrow{\partial_n}h_{n-1}(A)\to\cdots$$

где $i\colon A\hookrightarrow X$ и $j\colon X\hookrightarrow(X,A)$ — вложения пар, точна для любой пары (X,A);

(3) (*аксиома вырезания*) факторизация $(X,A)\to(X/A,*)$ индуцирует изоморфизмы $h_n(X,A)\xrightarrow{\cong}h_n(X/A,*)$;

(4) (*аксиома суммы*) вложения слагаемых в дизъюнктное объединение $X_\alpha\hookrightarrow\bigsqcup X_\beta$ индуцируют изоморфизмы $\bigoplus_\alpha h_n(X_\alpha)\xrightarrow{\cong}h_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha)$.

В свою очередь, последовательность функторов $\widetilde{h}_n$, $n\in\mathbb{Z}$ из категории пунктированных клеточных пространств в категорию абелевых групп называется *приведённой теорией гомологий*, если заданы естественные изоморфизмы $\mathrm{s}_n\colon\widetilde{h}_n(\Sigma X)\cong\widetilde{h}_{n-1}(X)$ и выполнены следующие условия:

(1) для пунктированно гомотопных отображений $f\sim g\colon X\to Y$ отображения $f_*\colon\widetilde{h}_n(X)\to\widetilde{h}_n(Y)$ и $g_*\colon\widetilde{h}_n(X)\to\widetilde{h}_n(Y)$ равны;

(2) для любой пунктированной клеточной пары (X,A) последовательности абелевых групп

$$\widetilde{h}_n(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{h}_n(X)\xrightarrow{p_*}\widetilde{h}_n(X/A),$$

индуцированные естественными включением и проекцией, точны (в среднем члене);

(3) вложения слагаемых в букет $X_\alpha\hookrightarrow\bigvee X_\beta$ индуцируют изоморфизмы $\bigoplus_\alpha\widetilde{h}_n(X_\alpha)\xrightarrow{\cong}\widetilde{h}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$.

а) Докажите, что правила $\widetilde{h}_n(X)=h_n(X,x_0)$ и $h_n(X,A)=\widetilde{h}_n(X/A)$ устанавливают естественную биекцию между приведёнными и неприведёнными теориями гомологий.
б) Сформулируйте и докажите для произвольной теории гомологий теорему типа Майера–Виеториса.
в) *Естественным преобразованием* теории гомологий называется последовательность естественных преобразований функторов $\phi_n\colon h_n\to h'_n$, коммутирующая с преобразованиями ∂. Эквивалентно, в терминах приведённых теорий нужно потребовать коммутирования с изоморфизмами надстройки.
Докажите, что если преобразование теорий гомологий является изоморфизмом на точке (то есть, индуцирует изоморфизмы $\phi_n\colon h_n(\mathrm{pt})\xrightarrow{\cong}h'_n(\mathrm{pt})$ для всех $n\in\mathbb{Z}$), то оно на самом деле является изоморфизмом на всех клеточных пространствах, то есть, просто изоморфизмом теорий гомологий.
г) Докажите, что если для теории гомологий h_* выполнена *аксиома размерности* $h_n(\mathrm{pt})=\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{если } n=0\\ 0, & \text{если } n\neq 0\end{cases}$, то на самом деле теория h_* изоморфна теории обычных гомологий H_*.
д) Докажите, что аксиома суммы для конечных дизъюнктных объединений следует из остальных аксиом.
Приведите пример последовательности функторов h_*, удовлетворяющую аксиомам (1)–(3), но не удовлетворяющую аксиоме (4).

14.* В этой задаче для простоты X — конечномерное, не более чем счётное, локально конечное клеточное пространство.
Для такого пространства X рассмотрим абелеву группу $C_n^{lf}(X)$ состоящую из бесконечных формальных сумм сингулярных n-мерных симплексов (с целыми коэффициентами) $\sum_\alpha n_\alpha\sigma_\alpha$,

удовлетворяющих условию *локальной конечности*, то есть, для каждой такой бесконечной цепи у любой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающаяся с образами лишь конечного числа сингулярных симплексов σ_α. Проверьте, что обычный дифференциал переводит C_n^{lf} в C_{n-1}^{lf}, и следовательно, мы получаем цепной комплекс $C_*^{lf}(X)$. Его гомологии называются *гомологиями с локально конечными носителями*, или *гомологиями с замкнутыми носителями*, или *гомологиями Бореля–Мура*.

а) Докажите, что такие гомологии являются функтором относительно *собственных отображений*, то есть, таких, при которых прообраз компакта компактен.

б) Вычислите $H_*^{lf}(\mathbb{R})$ и $H_*^{lf}(\mathbb{R}-0)$.

в) Убедитесь, что для компактного X гомологии $H_*^{lf}(X)$ совпадают с обычными гомологиями. Докажите, что гомологии H_*^{lf} не являются функтором относительно произвольных непрерывных отображений.

г) Докажите гомотопическую инвариантность H_*^{lf} относительно собственных гомотопий (то есть, собственных отображений $X \times I \to Y$).

д) Докажите, что имеет место «несобственный изоморфизм надстройки» $H_n^{lf}(X) \cong H_{n+1}^{lf}(\mathbb{R}\times X)$.

е) Докажите, что для открытого подмножества $U \subset X$ (удовлетворяющего всем условиям на наши пространства) существуют естественные гомоморфизмы ограничения $H_i^{lf}(X) \to H_i^{lf}(U)$.

ё) Докажите, что для вложения замкнутого подмножества $F \subset X$ существует длинная точная *последовательность локализации*

$$\cdots \to H_n^{lf}(F) \to H_n^{lf}(X) \to H_n^{lf}(X-F) \to H_{n-1}^{lf}(F) \to \cdots$$

ж) Докажите, что если $X \cong Y - K$, где (Y, K) — конечная клеточная пара, то $H_i^{lf}(X) \cong H_i(Y, K)$. Следовательно, $H_i^{lf}(X) \cong H_i(Y/K, \mathrm{pt})$ и Y/K — одноточечная компактификация X.

з) Докажите, что $H_*^{lf}(X)$ можно вычислять с помощью клеточного цепного комплекса пространства X (где также допускаются бесконечные суммы клеток, которые автоматически локально конечные, так как по условию само X — локально конечно).

и) Вычислите H_i^{lf} для ориентированной поверхности рода g без k точек.