ТОПОЛОГИЯ–1
ЛИСТОЧЕК 8: НАКРЫТИЯ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. *Локальным гомеоморфизмом* называется такое отображение $f\colon X \to Y$, что для любой точки $x \in X$ существует такая её окрестность U, что $f\colon U \to f(U)$ — гомеоморфизм U на окрестность $f(U)$ точки $f(x) \in Y$.

а) Убедитесь, что накрытие является локальным гомеоморфизмом. Докажите, что любой локальный гомеоморфизм является открытым отображением. Проверьте, что конечнолистное накрытие всегда является замкнутым отображением. Верно ли это для произвольных накрытий? Приведите пример сюръективного локального гомеоморфизма, не являющегося накрытием.

б) Проверьте, что если $p\colon Y \to X$ — конечнолистное накрытие, то X хаусдорфово $\Leftrightarrow$ Y хаусдорфово, и Y компактно $\Leftrightarrow$ X компактно.

в) Докажите, что если $p\colon Y \to X$ — накрытие, Y компактно и X хаусдорфово, то p конечнолистно. Выведите, что если X обладает компактным односвязным накрытием, то группа $\pi_1(X)$ конечна.

г) Докажите, что если f — локальный гомеоморфизм, а X и Y компактны и хаусдорфовы, то f — накрытие.

д) Приведите пример такого отображения $p\colon X \to Y$, что для любой точки $y \in Y$ существует такая её окрестность $U \ni y$, что $p^{-1}(U)$ гомеоморфно дизъюнктному объединению нескольких копий U, но при этом p не является накрытием.

2. Докажите, что

а) если $p\colon Y \to X$ — накрытие, то для любого $A \subset X$ ограничение $p^{-1}(A) \xrightarrow{p} A$ является накрытием;

б) для накрытий $p_1\colon Y_1 \to X_1$ и $p_2\colon Y_2 \to X_2$ произведение $p_1 \times p_2\colon Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ является накрытием. Верно ли это для бесконечных произведений?

в) если X локально линейно связно, то отображение $p\colon Y \to X$ является накрытием $\Leftrightarrow$ ограничение $p\colon p^{-1}(X_\alpha) \to X_\alpha$ на каждую компоненту линейной связности пространства X является накрытием;

г) если X локально линейно связно и связно и $p\colon Y \to X$ является накрытием, то и ограничение $p : Y_\alpha \to X$ на каждую компоненту линейной связности пространства Y также будет накрытием. Верно ли обратное?

д) если $p\colon \widetilde{X} \to X$ — односвязное накрывающее пространство для X, $A \subset X$ — линейно связное и локально линейно связное подпространство, а $\widetilde{A} \subset \widetilde{X}$ — компонента линейной связности пространства $p^{-1}(A)$, то отображение $p\colon \widetilde{A} \to A$ является (связным) накрытием, соответствующим ядру отображения $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

3. а) Докажите, что если у накрытия $p\colon Y \to X$ с линейно связным Y существует сечение $s\colon X \to Y$ (то есть, $p \circ s = \mathrm{id}_X$), то накрытие p тривиально (является гомеоморфизмом).

б) Докажите, что если X линейно связно, локально линейно связно и односвязно, то любое накрытие $p\colon Y \to X$ тривиально (то есть, имеет изоморфно $X \times \Delta \xrightarrow{pr} X$ для некоторого дискретного пространства Δ).

4. а) Докажите, что для любого накрытия $p\colon Y \to X$ над клеточным пространством X на Y существует такая структура клеточного пространства, что каждая открытая клетка в Y гомеоморфно проектируется посредством отображения p на некоторую открытую клетку из X.

б) В условиях пункта а) ограничение накрытия p на одномерный остов является накрытием $Y^1 \to X^1$. Пусть (для простоты) X и все накрытия над ним — связные.

Докажите, что два накрытия $Y \to X$ и $Z \to X$ изоморфны $\Leftrightarrow$ их ограничения $Y^1 \to X^1$ и $Z^1 \to X^1$ изоморфны. Докажите, что гомоморфизм $\mathrm{Aut}_X(Y) \to \mathrm{Aut}_{X^1}(Y^1)$, индуцированный ограничением на остов, является изоморфизмом и накрытие $Y \to X$ нормально $\Leftrightarrow$ накрытие $Y^1 \to X^1$ нормально.

5. Пусть мы имеем коммутативную диаграмму отображений пространств

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "r"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Докажите, что если Z связно и локально линейно связно, то

а) если отображения p и q являются накрытиями, то и r является накрытием;

б) если отображения q и r являются накрытиями и r конечнолистно, то композиция $p = r \circ q$ является накрытием;

в) если p и r являются накрытиями, то q также является накрытием;

г) если Z является ещё и полулокально односвязным, то композиция $p = r \circ q$ является накрытием.

д) Приведите пример таких накрытий q и r, что q конечнолистно и композиция $p = r \circ q$ не является накрытием. Проверьте, что это даёт пример отображения, обладающего свойством единственного поднятия гомотопии, но не являющегося накрытием.

е) Приведите пример таких накрытий p и r, что q не является накрытием.

6. Докажите, что если группа G действует на хаусдорфовом пространстве X свободно и так, что для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что множество $\{g \in G \mid U \cap gU \neq \varnothing\}$ конечно (например, группа G сама конечна), то $X \to X/G$ — накрытие.

7. Рассмотрим линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство X. Пусть $p\colon \widehat{X} \to X$ — (не обязательно связное) накрытие. Рассмотрим следующее действие фундаментальной группы $G = \pi_1(X, x_0)$ на конечном множестве $p^{-1}(x_0)$: для класса $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ и точки $x \in p^{-1}(x_0)$ определим $[\omega] \cdot x$ как начало $\widetilde{\omega}(0)$ такого поднятия пути ω, что $\widetilde{\omega}(1) = x$.

Проверьте, что это действительно (левое) действие $G \curvearrowright p^{-1}(x_0)$ (оно называется *монодромией*).

Проверьте, что морфизм конечнолистных накрытий $\begin{tikzcd} \widehat{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widehat{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$ индуцирует эквивариатное отображение G-множеств $f\colon p_1^{-1}(x_0) \to p_2^{-1}(x_0)$ (то есть, для всех $g \in G$ и $x \in p_1^{-1}(x_0)$ выполнено $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$).

а) Докажите, что для любого G-действия на множестве F существует $|F|$-листное накрытие $p\colon \widehat{X} \to X$, такое что G-множество F эквивариантно изоморфно G-множеству $p^{-1}(x_0)$.

б) Докажите, что отображение $\mathrm{Mor}_X(\widehat{X}_1, \widehat{X}_2) \to \mathrm{Hom}_G(p_1^{-1}(x_0), p_2^{-1}(x_0))$, $f \mapsto f|_{p_1^{-1}(x_0)}$ задаёт биекцию между множеством морфизмов между конечнолистными накрытиями и множеством эквивариантных отображений G-множеств. В частности, выведите отсюда, что накрытие из пункта а) единственно с точностью до изоморфизма, и мы получаем биекцию между множеством конечнолистных накрытий над X (с точностью до изоморфизма) и множеством конечных G-множеств (с точностью до изоморфизма).

в) Какие G-множества при этой биекции соответствуют накрытиям со связным $\widehat{X}$? Какие G-множества соответствуют накрытиям, равным композиции двух накрытий? Какая подгруппа в G соответствует связному накрытию, получающимся ограничением накрытия на компоненту связности точки $x \in p^{-1}(x_0)$?

В случае связных накрытий сравните классификацию с помощью G-множеств с классификацией с помощью классов сопряжённости подгрупп в G.

г) Рассмотрим односвязное накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$. В этом случае группа $\mathrm{Aut}_X(\widetilde{X})$ отождествляется с фундаментальной группой $\pi_1(X, x_0)$, то есть, группа $\pi_1(X, x_0)$ действует слева на всём пространстве $\widetilde{X}$. При отождествлении $\widetilde{X}$ с множеством классов гомотопии путей $\{[\gamma] \mid \gamma(0) = x_0\}$ сравните это действие с естественным левым действием $[\omega]\cdot[\gamma] = [\omega\gamma]$ из доказательства существования накрытий (здесь $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$).

Кроме того, так как любой автоморфизм накрытия переводит слой $p^{-1}(x_0)$ в себя, мы получаем таким образом ещё одно левое действие $\pi_1(X, x_0) = \mathrm{Aut}_X(\widetilde{X}) \curvearrowright p^{-1}(x_0)$. Сравните это действие с действием монодромии и опишите пространства, для которых эти действия совпадают.

8. а) Докажите, что для любой замкнутой неориентируемой поверхности N_g рода g существует двулистное накрытие $M_{g-1} \to N_g$, где M_{g-1} — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g-1$.

На самом деле, существует такое «минимальное» накрытие, через которое пропускается любое другое ориентируемое конечнолистное накрытие над N_g (то есть, соответствующая подгруппа в $\pi_1(N_g)$ наоборот максимальна).

б) Докажите, что если для целых чисел $n, g, h \geqslant 1$ выполнено $h-1 = n(g-1)$, то существует n-листное накрытие $M_h \to M_g$, где M_k — замкнутая ориентированная поверхность рода k. Аналогично, если $h-2 = n(g-2)$, то существует n-листное накрытие $N_h \to N_g$, где N_k — замкнутая неориентированная поверхность рода k.

9. Опишите явно все связные накрытия для следующих пространств:

а) тора $T^2 = S^1 \times S^1$;

б) букета $S^1 \vee S^2$;

в) букета $S^2 \vee \mathbb{R}P^2$;

г) сферы S^2 с двумя склеенными точками;

д) сферы S^2 с приклеенным по концам отрезком, соединяющим две её различные точки;

е) букета $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$;

и односвязные накрытия для

ё) букета $S^1 \vee T^2$;

ж) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с приклеенным по концам отрезком, соединяющим две её различные точки;

з) произвольной замкнутой поверхности (ориентируемой или нет).

10. Опишите явно накрывающее пространство над букетом двух окружностей, соответствующее

а) подгруппе, состоящей из слов чётной длины;

б) коммутанту $[F_2, F_2]$.

Какой у этих свободных подгрупп ранг?

11. Проверьте, что существует двулистное накрытие $S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$.

12. Пусть пространство X линейно связно, локально линейно связно и полулокально односвязно. Тогда линейно связное накрывающее пространство $Y \to X$ называется *абелевым*, если оно нормально и группа преобразований $\mathrm{Aut}_X(Y)$ абелева. Докажите, что у X есть универсальное абелево накрывающее пространство, то есть, такое, которое является накрывающим пространством любого другого абелева накрывающего пространства для X, причём такое накрывающее пространство единственно с точностью до изоморфизма. Какой подгруппе в $\pi_1(X)$ оно соответствует? Опишите явно это накрывающее пространство для $X = S^1 \vee S^1$. Выведите, что у замкнутой ориентируемой поверхности M_g рода g есть связное нормальное накрывающее пространство с группой автоморфизмов, изоморфной $\mathbb{Z}^n$, тогда и только тогда, когда $n \leqslant 2g$.

13. Приведите пример полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

14. Проверьте, что любое двулистное накрытие нормально. Приведите пример ненормального трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и ориентируемой поверхностью рода 2.

15. а) Для бутылки Клейна K постройте n-листное нормальное накрытие $K \to K$ для каждого $n > 0$.

б) Постройте n-листное ненормальное накрытие $K \to K$ для каждого $n > 2$.

в) Покажите, что для тора T число листов накрытия $T \to K$ обязано быть чётным.

г) Постройте n-листное нормальное накрытие $T \to K$ для каждого чётного $n > 1$.

д) Постройте n-листное ненормальное накрытие $T \to K$ для каждого чётного $n > 2$.

16. а) Докажите, что подгруппа конечного индекса в конечно порождённой группе сама конечно порождена. То же для конечно представленных групп.

б) Докажите, что любая нетривиальная нормальная подгруппа N бесконечного индекса в конечнопорождённой свободной группе F никогда не является конечно порождённой.

в) Докажите, что любая конечнопорождённая группа имеет лишь конечное число различных подгрупп фиксированного конечного индекса.

г) Докажите, что свободная группа на двух образующих имеет несчётное число различных подгрупп. Верно ли это для свободной абелевой группы на двух образующих?

17. Рассмотрим нормальное накрытие $p\colon X \to X/G$ для действия накрытия группы G на линейно связном и локально линейно связном пространстве X. Тогда каждая подгруппа $H \subset G$ определяет разложение накрытия p в композицию накрытий $X \to X/H \to X/G$. Докажите, что

а) для любого разложения p в композицию накрытий $X \to Y \to X/G$ с линейно связным Y, накрытие $Y \to X$ изоморфно накрытию вида $X/H \to X/G$ для некоторой подгруппы $H \subset G$;

б) два таких накрывающих пространства X/H_1 и X/H_2 для X/G изоморфны тогда и только тогда, когда H_1 и H_2 — сопряжённые подгруппы в G;

в) накрывающее пространство $X/H \to X/G$ нормально тогда и только тогда, когда H — нормальная подгруппа в G, и в таком случае группа преобразований этого накрытия изоморфна G/H.

18. Докажите, что для действия накрытия группы G на односвязном пространстве X группа $\pi_1(X/G)$ изоморфна G (для не обязательно локально линейно связного X).

19. Докажите, что если линейно связные и локально линейно связные пространства гомотопически эквивалентны, то и их односвязные накрывающие — тоже.

20. Докажите, что если для линейно связного и локально линейно связного пространства X его фундаментальная группа $\pi_1(X)$ состоит только из элементов конечного порядка, то любое отображение $X \to S^1$ гомотопно нулю. В частности, любое отображение $S^n \to S^1$ гомотопно нулю (то есть, $\pi_n(S^1) = 0$) при $n > 1$. Существует ли не гомотопное нулю отображение $S^3 \to S^2$?

21. Приведите пример линейно связного пространства X, у которого не существует односвязного накрытия $\widetilde{X} \to X$.

22. Приведите пример такого отображения $f\colon Y \to X$ между линейно связными пространствами Y и X, что пространство X обладает односвязным накрытием $\widetilde{X} \to X$, $f_*(\pi_1(Y, y)) = 0$, но отображение f не поднимается до отображения $\tilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ в односвязное накрытие пространства X.