ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОЧЕК 2: ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Рассмотрим коммутативную диаграмму групп (и гомоморфизмов)

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[d, "f_4"] \\ B_1 \arrow[r, "b_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] & B_4 \end{tikzcd}$$

Пусть её строки точны, то есть, образ каждой (горизонтальной) стрелки равен ядру следующей стрелки: $\mathrm{im}(a_i) = \ker a_{i+1}$, $i = 1, 2$, и аналогично для b_i.
а) Докажите, что если отображения f_2 и f_4 инъективны, а отображение f_1 сюръективно, то f_3 инъективно.
б) Докажите, что если отображения f_1 и f_3 сюръективны, а отображение f_4 инъективно, то f_2 сюръективно.

В частности, если у нас есть коммутативная диаграмма групп

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

с точными строками, в которой f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то f_3 тоже изоморфизм.

2. а) Вспомните, как по пути $\gamma\colon I \to X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ определяется изоморфизм групп $L_\gamma\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$, убедитесь, что он зависит только от класса гомотопии пути γ (с закреплёнными концами) и для компонируемых путей имеет место равенство $L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_2} = L_{\gamma_1\gamma_2}$.
Проверьте, что для гомотопии $F\colon X \times I \to Y$ между отображениями $f, g\colon X \to Y$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_n(Y, f(x_0)) \\ & \pi_n(Y, g(x_0)) \arrow[u, "L_\gamma"] \end{tikzcd}$$

где $\gamma(t) = F(x_0, t)$ — путь между $f(x_0)$ и $g(x_0)$.
Выведите, что любая гомотопическая эквивалентность (не обязательно пунктированная) является слабой эквивалентностью.
б) В частности, мы получаем (левое) действие $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$. Убедитесь, что изоморфизмы L_γ вообще не зависят от пути $\iff$ это действие тривиально (для любой отмеченной точки $\iff$ для одной отмеченной точки в каждой компоненте линейной связности). То есть, для линейно связного пространства в случае тривиального действия можно считать, что гомотопические группы вовсе не зависят от точки и писать просто $\pi_n(X)$, отождествляя их с помощью единственных изоморфизмов L_γ.
в) Сформулируйте и докажите аналоги для относительных групп $\pi_n(X, A, x_0)$.

3. а) Согласно предыдущей задаче, мы имеем (левое) действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$ (и соответственно $\pi_1(A, x_0)$ — на $\pi_n(A, x_0)$) и (левое) действие группы $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, A, x_0)$ (включая пунктированное множество при $n = 1$). Вспомните также, как группа $\pi_1(X, x_0)$ действует (слева) на пунктированном множестве $\pi_1(X, A, x_0)$.

Проверьте, что для гомотопической длинной точной последовательности пары

$$\cdots \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_0(X, x_0)$$

выполнено следующее:

- при $n \geqslant 1$ отображения $i_n \colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ являются гомоморфизмами групп и $i_n(\alpha \cdot a) = i_1(\alpha) \cdot i_n(a)$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $a \in \pi_n(A, x_0)$;
- при $n \geqslant 2$ отображения $j_n \colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ являются гомоморфизмами групп и $j_n(i_1(\alpha) \cdot x) = \alpha \cdot j_n(x)$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $x \in \pi_n(X, x_0)$;
- при $n \geqslant 2$ отображения $\partial_n \colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ являются гомоморфизмами и $\partial_n(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \partial_n(y)$ для $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, $y \in \pi_n(X, A, x_0)$;
- $j_1 \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, A, x_0)$ удовлетворяет $j_1(\omega x) = \omega \cdot j_1(x)$ для $\omega \in \pi_1(X, x_0)$, $x \in \pi_1(X, x_0)$ (здесь ωx — умножение в $\pi_1(X, x_])$, а не действие $\pi_1(X, x_0)$ на себе сопряжением!);
- прообразы элементов множества $\pi_0(A, x_0)$ при отображении ∂_1 совпадают с орбитами действия $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_1(X, A, x_0)$.

б)* Докажите также, что имеет место равенство $\partial_2(\alpha) \cdot \beta = \alpha\beta\alpha^{-1}$ для $\alpha, \beta \in \pi_2(X, A, x_0)$.
в)* Для произвольного расслоения Гуревича $F \to E \to B$ (с линейно связной базой) определите действие $\pi_1(E, e_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$, $n \geqslant 1$, расширяющее с помощью $i \colon F \hookrightarrow E$ действие $\pi_1(F, e_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$, то есть, такое, что $i_*(\phi) \cdot f = \phi \cdot f$ для $\phi \in \pi_1(F, e_0)$, $f \in \pi_n(F, e_0)$ (в частности, получаем, что если E — стягиваемо, то все действия $\pi_1(F, e_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$ — тривиальны). Напомним (см. задачу 11 листочка 1), что мы также имеем действие монодромии $\pi_1(B, b_0) \curvearrowright \pi_0(F)$ (так как монодромия не сохраняет отмеченные точки, мы, вообще говоря, не можем определить действия $\pi_1(B, b_0) \curvearrowright \pi_n(F, e_0)$ для $n \geqslant 1$). Для этих действий докажите аналогичные свойства длинной точной последовательности расслоения (обобщая случай «расслоения» $P(X, A, x_0) \to A \to X$).

4. Рассмотрим коммутативную диаграмму групп (здесь «Y/X» — просто обозначение для некоторых групп, а не какая-то факторконструкция)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dr, "j_3"'] & & (X/A)_{n+1} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & & (A/B)_n \arrow[rr, "\partial_2"] \arrow[dr, "i"] & & B_{n-1} \arrow[rr, "i_3"] \arrow[dr, "i_2"] & & X_{n-1} \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dr, "j_3"'] & & \cdots \\
\cdots & (X/B)_{n+1} \arrow[ur, "j"'] \arrow[dr, "\partial_3"] & & A_n \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[dr, "i_1"] & & (X/B)_n \arrow[ur, "\partial_3"] \arrow[dr, "j"] & & A_{n-1} \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[dr, "j_2"] & & (X/B)_{n-1} \arrow[ur, "j"'] \arrow[dr, "\partial_3"] & \cdots \\
\cdots \arrow[rr, "\partial_2"] \arrow[ur, "i"] & & B_n \arrow[rr, "i_3"] \arrow[ur, "i_2"] & & X_n \arrow[rr, "j_1"] \arrow[ur, "j_3"] & & (X/A)_n \arrow[rr, "\partial"] \arrow[ur, "\partial_1"] & & (A/B)_{n-1} \arrow[rr, "\partial_2"] \arrow[ur, "i"] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

«сплетённую» из трёх последовательностей

$$\cdots \to (X/A)_{n+1} \xrightarrow{\partial_1} A_n \xrightarrow{i_1} X_n \xrightarrow{j_1} (X/A)_n \xrightarrow{\partial_1} A_{n-1} \to \cdots$$

$$\cdots \to (A/B)_{n+1} \xrightarrow{\partial_2} B_n \xrightarrow{i_2} A_n \xrightarrow{j_2} (A/B)_n \xrightarrow{\partial_2} B_{n-1} \to \cdots$$

$$\cdots \to (X/B)_{n+1} \xrightarrow{\partial_3} B_n \xrightarrow{i_3} X_n \xrightarrow{j_3} (X/B)_n \xrightarrow{\partial_3} B_{n-1} \to \cdots$$

и последовательности

$$(\star) \qquad \cdots \to (X/A)_{n+1} \xrightarrow{\partial} (A/B)_n \xrightarrow{i} (X/B)_n \xrightarrow{j} (X/A)_n \xrightarrow{\partial} (A/B)_{n-1} \to \cdots$$

Докажите, что если красная, синяя и зелёная последовательности точны, а также в последовательности $(\star)$ выполнено $j \circ i = 0$, то последовательность $(\star)$ также точна.

Выведите отсюда гомотопическую длинную точную последовательность тройки (проверьте, что в её конце, где возникают не группы, а множества с отмеченными точками, тоже никаких проблем с точностью не возникает ввиду наличия действий фундаментальных групп из предыдущей задачи).

5. Убедитесь, что диаграмма
$$\begin{tikzcd} \pi_n(CX,X) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[dr] & \pi_{n-1}(X) \arrow[d, "\Sigma"] \\ & \pi_n(\Sigma X) \end{tikzcd}$$
коммутативна (здесь CX — конус над X, а ∂ — гомоморфизм из гомотопической длинной точной последовательности пары (CX, X)).

6. Проверьте, что $\pi_3(D^2, S^1) = 0$ в отличие от $\pi_3(D^2/S^1) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. Аналогично представьте сферу S^2 в виде объединения двух полусфер $S^2 = D^2_+ \cup D^2_-$ и проверьте, что $\pi_3(S^2, D^2_+) = \mathbb{Z}$, а $\pi_3(D^2_-, D^2_+ \cap D^2_-) = 0$. Эти примеры показывают необходимость ограничения на размерности в теореме о гомотопическом вырезании.

7. а) Проверьте, что $f\colon X \to Y$ является n-эквивалентностью $\iff$ для любого клеточного пространства Z размерности $< n$ индуцированное отображение $f_*\colon [Z, X] \to [Z, Y]$ является биекцией, а для любого клеточного пространства Z размерности n — сюръекцией (заметьте, что тут непунктированные классы гомотопии, а в определении гомотопических групп - пунктированные) $\iff$ то же, но для пунктированных гомотопий.
В частности, отображение $f\colon X \to Y$ является слабой эквивалентностью $\iff$ для любого клеточного пространства Z индуцированное отображение $[Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$ биективно.
б) Выведите из пункта а), что если отображение n-мерных клеточных пространств индуцирует изоморфизм на π_i, $i \leq n$, то оно является гомотопической эквивалентностью.
В частности, если n-мерное клеточное пространство является n-связным, то оно стягиваемо.
в) Выведите из пункта а) обобщение теоремы Фрейденталя: для любого клеточного пространства Z и n-связного пространства X отображение надстройки $\Sigma\colon [Z, X]_\bullet \to [\Sigma_\bullet Z, \Sigma_\bullet X]_\bullet$ биективно при $\dim Z < 2n + 1$ и сюръективно при $\dim Z = 2n + 1$.
В частности, гомоморфизмы $\Sigma\colon [\Sigma^N_\bullet Z, \Sigma^N_\bullet X]_\bullet \to [\Sigma^{N+1}_\bullet Z, \Sigma^{N+1}_\bullet X]_\bullet$ становятся эпиморфизмами при $N \geqslant \dim Z - 2n - 1$ и изоморфизмами при $N > \dim Z - 2n - 1$.
г)* Докажите, что два пространства X и Y слабо эквивалентны $\iff$ функторы $h_X(Z) = [Z, X]$ и $h_Y(Z) = [Z, Y]$ из категории клеточных пространств в категорию множеств естественно изоморфны.
д)* Приведите пример слабой эквивалентности $f\colon X \to Y$ и клеточного пространства Z, таких что индуцированное отображение $f^*\colon [Y, Z] \to [X, Z]$ не биективно.

8. а) Докажите, что если клеточная пара (X, A) является n-связной, то существует клеточное пространство Z, получающееся из A приклеиванием клеток размерности $\geqslant n + 1$, и такое, что пара (Z, A) гомотопически эквивалентна паре (X, A), причём все гомотопии неподвижны на A.
б) Пусть даны CW-аппроксимации $Q(X) \to X$ и $Q(Y) \to Y$. Докажите, что для любого отображения $X \to Y$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $Q(X) \to Q(Y)$, превращающее диаграмму
$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[r] \arrow[d] & Q(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$
в коммутативную с точностью до гомотопии.
Выведите, что CW-аппроксимация единственна с точностью до гомотопической эквивалентности.
в) Пусть для пары (X, A) выбрана некоторая CW-аппроксимация подпространства $\phi\colon Q(A) \to A$. Докажите, что тогда существует CW-аппроксимация $\Phi\colon Q(X) \to X$, такая что $Q(A) \subset Q(X)$ — клеточное подпространство и $\Phi|_{Q(A)} = \phi$.

Аналогично проверьте, что для другой пары (Y, B), её аналогичной CW-аппроксимации $(Q(Y), Q(B)) \to (Y, B)$ и любого отображения пар $(X, A) \to (Y, B)$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $(Q(X), Q(A)) \to (Q(Y), Q(B)))$, превращающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} (Q(X), Q(A)) \arrow[r] \arrow[d] & (Q(Y), Q(B)) \arrow[d] \\ (X, A) \arrow[r] & (Y, B) \end{tikzcd}$$

в коммутативную с точностью до гомотопии.

Покажите, что если пара (X, A) является n-связной, то можно выбрать такую CW-аппроксимацию $(Q(X), Q(A))$, что $Q(X)$ получается из $Q(A)$ с помощью приклеивания клеток размерности $\geqslant n+1$ (то есть, $Q(A) = Q(X)^n$ — n-остов).

г)* Пусть пространство X покрывается внутренностями своих подпространств A и B: $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$. Обозначим $C = A \cap B$. Докажите, что тогда существует клеточное пространство $Q(X)$, представляемое в виде объединения двух своих клеточных подпространств $Q(A)$ и $Q(B)$, и отображение $\phi\colon (Q(X); Q(A), Q(B)) \to (X; A, B)$, такое что ограничения $\phi\colon Q(X) \to X$, $\phi\colon Q(A) \to A$, $\phi\colon Q(B) \to B$ и $\phi\colon Q(A) \cap Q(B) \to C$ являются CW-аппроксимациями.

Причём, если пара (A, C) является n-связной, то можно выбрать такие CW-аппроксимации, что $Q(A)$ получается из $Q(A) \cap Q(B)$ с помощью приклеивания клеток размерности $\geqslant n+1$ (и аналогично для (B, C)).

Кроме того, эта конструкция также функториальна с точностью до гомотопии, аналогично пунктам а) и б).

9. а) Докажите, что пространства X и Y слабо эквивалентны (см. пункт б) задачи 11 первого листочка) $\iff$ они связаны «зигзагом длины 2» $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ из слабых эквивалентностей.

б)* Приведите пример такой слабой эквивалентности $X \to Y$, что не существует слабой эквивалентности $Y \to X$.

10. а) Докажите, что для любого целого числа $n \geqslant 0$ и группы π (абелевой, если $n \geqslant 2$, и просто множества, если $n = 0$) существует клеточное пространство X, имеющее единственную ненулевую гомотопическую группу $\pi_n(X) = \pi$.

б) Докажите, что такое клеточное пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

Пространства с единственной ненулевой n-лй гомотопической группой равной π называются *пространствами Эйленберга–Маклейна типа* $K(\pi, n)$.

в) Докажите, что пространства S^1, $\mathbb{R}P^\infty$, $\mathbb{C}P^\infty$, а также бутылка Клейна являются пространствами Эйленберга–Маклейна. Убедитесь, что если X — пространство Эйленберга–Маклейна типа $K(\pi, n)$, то ΩX — пространство Эйленберга–Маклейна типа $K(\pi, n-1)$.

г)* Докажите, что все замкнутые двумерные поверхности, за исключением S^2 и $\mathbb{R}P^2$, являются пространствами Эйленберга–Маклейна.

д) Докажите, что если n-мерное клеточное пространство X имеет $\pi_i(X) = 0$ при $2 \leq i \leq n$, то X является пространством типа $K(\pi_1(X), 1)$.

е) Докажите, что если X — $(n-1)$-связное клеточное пространство ($n \geqslant 1$), а пространство Y линейно связно и $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$, то естественное отображение $[X, Y]_\bullet \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$, $f \mapsto f_*$ является биекцией. В частности, если X — типа $K(\pi, n)$, а Y — $K(G, n)$, то $[X, Y]_\bullet \cong \mathrm{Hom}(\pi, G)$. Чему в терминах групп π и G соответствует множество непунктированных гомотопических классов $[X, Y]$?

11. а) Пусть на множестве M есть две бинарные операции: $\circ$ и $\star$. Предположим, что эти операции обладают двусторонними единицами, $1_\circ$ и $1_\star$ соответственно, и «коммутируют друг с другом», то есть, выполнено $(a \star b) \circ (c \star d) = (a \circ c) \star (b \circ d)$.

Докажите, что тогда эти две операции совпадают (в частности, $1_\circ = 1_\star$), ассоциативны и коммутативны. (Это явление носит название *аргумент Экманна–Хилтона*)

б) Докажите с помощью пункта а), что при $n \geqslant 2$ умножения на π_n, определяемые с помощью разных координат (на кубах), совпадают (и, кроме того, ассоциативны и коммутативны). Аналогично для относительных π_n при $n \geqslant 3$.
в)* Докажите с помощью пункта а), что для (пунктированного) H-пространства X (то есть, пространства с отмеченной точкой x_0 и (пунктированным) отображением $\mu\colon X \times X \to X$ такими, что композиции $X = X \times \{x_0\} \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\mu} X$ и $X = \{x_0\} \times X \hookrightarrow X \times X \xrightarrow{\mu} X$ (пунктированно) гомотопны id_X) операция $\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) = \pi_n(X \times X, (x_0, x_0)) \xrightarrow{\mu_*} \pi_n(X, x_0)$ совпадает с умножением в гомотопической группе (а также всегда коммутативна и ассоциативна, в частности, $\pi_1(X, x_0)$ — коммутативна).
Применяя это к H-пространству петель ΩX, мы опять получаем коммутативность высших гомотопических групп и независимость операции от выбранной координаты.
г)* Докажите, что вообще на множестве $[S^n, X]_\bullet$, $n \geqslant 2$ существует только одна естественная по X структура группы. В свою очередь, покажите, что на множестве $[S^1, X]_\bullet$ существует ровно две естественные групповые структуры: стандартное умножение $u \cdot v$ и умножение «в обратном порядке» $u \star v := v \cdot u$.

12. Рассмотрим отражение $R\colon S^n \to S^n$ сферы относительно какой-нибудь гиперплоскости, проходящей через её центр. Докажите, что гомотопический класс $[R]$ представляет $-\iota_n$ в гомотопической группе $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ с образующей $[\mathrm{id}] = \iota_n$.

13. Для клеточного пространства X сравните стандартное действие $\pi_1(X, x_0)$ на гомотопических группах $\pi_n(X, x_0)$ со следующими действиями:
а) Рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{X} \to X$. Оно индуцирует изоморфизмы $\pi_n(\tilde{X}) \cong \pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 2$ (здесь можно не писать отмеченную точку $\tilde{X}$, так как согласно пункту б) задачи 2 для односвязных пространств фундаментальные группы в различных точках канонически изоморфны). Вспомните, как фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ отождествляется с группой $\mathrm{Aut}_X(\widetilde{X})$ автоморфизмов универсального накрытия. Таким образом, мы получаем действие $\pi_1(X, x_0) \cong \mathrm{Aut}_X(\widetilde{X}) \curvearrowright \widetilde{X}$, и следовательно, индуцированное действие $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_n(\widetilde{X}) \cong \pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 2$ (заметим, что действие $\mathrm{Aut_X(\widetilde{X})} \curvearrowright \widetilde{X}$, очевидно, не сохраняет никаких отмеченных точек, однако, опять же в силу того, что $\widetilde{X}$ односвязно, всё корректно).
б) Рассмотрим расслоение путей $P(X, x_0) = \{\gamma\colon I \to X \mid \gamma(0) = x_0\} \xrightarrow{\gamma(1)} X$. Это расслоение Гуревича со слоем ΩX над x_0. Согласно задаче 11 из листочка 1 мы имеем корректное действие монодромии $\pi_1(X, x_0) \to [\Omega X, \Omega X]$ (которое тоже, конечно, не сохраняет отмеченных точек). В силу естественной биекции $[X, \Omega Y]_\bullet \cong [\Sigma_\bullet X, Y]_\bullet$ мы получаем, что $\pi_n(\Omega X, c_{x_0}) \cong \pi_{n+1}(X, x_0)$. Но действие $\pi_1(\Omega X, c_{x_0}) \curvearrowright \pi_n(\Omega X, c_{x_0})$ тривиально (в силу пункта в задачи 3, так как $P(X, x_0)$ в расслоении путей стягиваемо, либо в силу пункта в) задачи 15 ниже, так как ΩX является H-пространством относительно умножения петель). Следовательно, согласно пункту б) задачи 2 мы можем не обращать внимания на отмеченные точки в пространстве петель, и тогда монодромия корректно индуцирует действие $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X, x_0)$.
в) Согласно задаче 9 первого листочка отображение $C(S^n, X) \to X$, вычисляющее значение в точке $s_0 \in S^n$, является расслоением Гуревича (так как вложение точки $\{s_0\} \hookrightarrow S^n$ — корасслоение). Его слоем является пространством $C_\bullet(S^n, X)$ пунктированных отображений, и мы получаем действие монодромии $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \pi_0(C_\bullet(S^n, X)) = \pi_n(X, x_0)$.
г)* Согласно пункту а) задачи 8 седьмого листочка по топологии-1 для любого пространства X, для которого вложение отмеченной точки — корасслоение, и любого пространства Y мы имеем действие $\pi_1(Y, y_0) \curvearrowright [X, Y]_\bullet$. В частности, для $X = S^n$ получаем $\pi_1(Y, y_0) \curvearrowright \pi_n(Y, y_0)$.

д) Рассмотрим следующий относительный вариант пункта а). Пусть $A \subset X$ — клеточное подпространство, причём вложение индуцирует изоморфизм $\pi_1(A) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$. Убедитесь, что тогда $\widetilde{A} = p^{-1}(A) \subset \widetilde{X}$ — универсальное накрытие над A, p индуцирует изоморфизмы $\pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{A}) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, A, x_0)$ (причём группы $\pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{A})$ не зависят от отмеченной точки) и мы получаем действие группы $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$ на паре $(\widetilde{X}, \widetilde{A})$, а значит, и на группах $\pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{A}) \cong \pi_n(X, A, x_0)$. Сравните это действие со стандартным действием $\pi_1(A, x_0) \curvearrowright \pi_n(X, A, x_0)$.

14. Вычислите действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$ для
а) $X = \mathbb{R}P^n$
б) $X = S^1 \vee S^n$

15. а) Рассмотрим на сферах S^k и S^l ($k,\, l \geq 1$) минимальные клеточные структуры из двух клеток и индуцированную клеточную структуру из четырёх клеток на произведении $S^k \times S^l$. Рассмотрим приклеивающее отображение для клетки старшей размерности $w\colon S^{k+l-1} \to S^k \vee S^l$.
Убедитесь, что явно это приклеивающее отображение имеет вид

$$S^{k+l-1} = \partial(D^k \times D^l) = S^{l-1} \times D^k \cup_{S^{k-1} \times S^{k-1}} D^l \times S^{k-1} \to S^k \vee S^l,$$

где последнее отображение составлено из двух отображений $S^{l-1} \times D^k \to D^k \to D^k/S^{k-1} = S^k \hookrightarrow S^k \vee S^l$ и $S^{k-1} \times D^l \to D^l \to D^l/S^{l-1} = S^l \hookrightarrow S^k \vee S^l$ и схлопывает пересечение $S^{k-1} \times S^{l-1}$ в точку.
Тогда *произведением Уайтхеда* двух сфероидов $f\colon S^k \to X$ и $S^l \to X$ называется сфероид $S^{k+l-1} \xrightarrow{w} S^k \vee S^l \xrightarrow{f \vee g} X$.
Проверьте, что таким образом мы получаем корректное отображение

$$\pi_k(X, x_0) \times \pi_l(X, x_0) \xrightarrow{[-,-]} \pi_{k+l-1}(X, x_0)$$

б) Докажите, что при $k = l = 1$ произведение Уайтхеда совпадает с коммутатором петель в фундаментальной группе: $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.
Более общо, докажите, что при $k = 1$ произведение Уайтхеда связано с действием фундаментальной группы на высших гомотопических группах следующим образом: $[\alpha, f] = \alpha \cdot f - f$.
в) Убедитесь, что $[f, g] = 0$ тогда и только тогда, когда отображение $S^k \vee S^l \xrightarrow{f \vee g} X$ продолжается до отображения $S^k \times S^l \to X$.
Выведите, что если X является H-пространством (см. пункт в) задачи 11), то все произведения Уайтхеда в гомотопических группах пространства X равны нулю.
В частности, из предыдущего пункта следует, что все действия фундаментальной группы на гомотопических группах в этом случае тривиальны.
г)* Докажите, что при гомоморфизме надстройки $\Sigma\colon \pi_{k+l-1}(X, x_0) \to \pi_{k+l}(X, x_0)$ все произведения Уайтхеда переходят в ноль.
д)* Докажите, что произведение Уайтхеда градуированно кососимметрично: $[f, g] = (-1)^{kl}[g, f]$ (при $k, l > 1$).
е)* Докажите, что произведение Уайтхеда билинейно: $[f, g + h] = [f, g] + [f, h]$ (при $l > 1$) и $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$ (при $k > 1$).
На самом деле, оно ещё удовлетворяет градуированному тождеству Якоби и задаёт на гомотопических группах структуру градуированного кольца Ли.

16.* Докажите, что для образующих $\iota_2 \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (класс тождественного отображения) и $\eta \in \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (класс отображения Хопфа $S^3 \to S^2$) выполнено равенство $[\iota_2, \iota_2] = 2\eta$.

В частности, из пункта г) задачи 15 получаем, что $2\eta \in \ker(\Sigma\colon \pi_3(S^2) \twoheadrightarrow \pi_4(S^3))$, и следовательно, первая стабильная гомотопическая группа сфер $\pi_1^s = \pi_4(S^3)$ равна 0 или $\mathbb{Z}/2$.

Согласно «трудной части теоремы Фрейденталя» ядро сюръективного гомоморфизма надстройки $\Sigma\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n}(S^{n+1})$ всегда является циклической группой, порождённой скобкой Уайтхеда $[\iota_n, \iota_n]$ (в частности, $\pi_1^s \cong \mathbb{Z}/2$). Эта скобка равна нулю при $n = 1, 3, 7$ (в силу пункта в) задачи 15, так как в этом случае S^n является H-пространством из умножения на комплексных числах, кватернионах и октавах), имеет порядок 2 при остальных нечётных n (согласно пункту д) задачи 15 $2[\iota_n, \iota_n] = 0$ при нечётных n, то, что $[\iota_n, \iota_n] \neq 0$ при $n \neq 1, 3, 7$ требует отдельного доказательства) и имеет бесконечный порядок для чётных n (существует гомоморфизм $H\colon \pi_{4k-1}(S^{2k}) \to \mathbb{Z}$, называемый *инвариантом Хопфа*, переводящий $[\iota_{2k}, \iota_{2k}]$ в $2 \in \mathbb{Z}$).

17. Для простоты в этой задаче все пространства предполагаются клеточными.
а) Докажите, что для любого связного клеточного пространства X и любого $n \geqslant 1$ существуют клеточное пространство $\tau_{\leqslant n}X$ и отображение $\tau_{\leqslant n}\colon X \to \tau_{\leqslant n}X$, такие что:

(1) $(\tau_{\leqslant n})_*\colon \pi_i(X) \to \pi_i(\tau_{\leqslant n}X)$ — изоморфизмы при $i \leqslant n$
(2) $\pi_i(\tau_{\leqslant n}X) = 0$ при $i > n$.

Говорят, что пространство $\tau_{\leqslant n}X$ получено из X *«заклеиванием»* всех гомотопических групп старше n-ой.
Докажите, что такое пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности, а отображение — с точностью до гомотопии, и выполнены следующие свойства:

(3) для клеточного пространства Y, такого что $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$ и любого отображения $f\colon X \to Y$, существует единственное с точностью до гомотопии отображение $\tau_{\leqslant n}X \to Y$, замыкающее коммутативную (с точностью до гомотопии) диаграмму
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_{\leqslant n}"] \arrow[dr, "f"'] & \tau_{\leqslant n}X \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(4) для любого отображения $f\colon X \to Y$ такого, что гомоморфизмы $f_*\colon \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ являются изоморфизмами при $i \leqslant n$, существует (единственное с точностью до гомотопии) отображение $Y \to \tau_{\leqslant n}X$, замыкающее диаграмму
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_{\leqslant n}"] \arrow[dr, "f"'] & \tau_{\leqslant n}X \\ & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$
, коммутативную с точностью до гомотопии;

(5) каждое отображение $X \to Y$ (единственным образом с точностью до гомотопии) включается в (гомотопически) коммутативную диаграмму
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leqslant n}X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \tau_{\leqslant n}Y \end{tikzcd}$$

Проверьте, что построенные отображения можно (единственным образом с точностью до гомотопии) включить в (гомотопически) коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, "p_3"] \\ & \tau_{\leqslant 3}X \arrow[d, "p_2"] \\ & \tau_{\leqslant 2}X \arrow[d, "p_1"] \\ X \arrow[r, "\tau_{\leqslant 1}"] \arrow[ur, "\tau_{\leqslant 2}"] \arrow[uur, bend left, "\tau_{\leqslant 3}"] & \tau_{\leqslant 1}X \end{tikzcd}$$

Эта конструкция называется *башней Постникова* пространства X.

Убедитесь, что пространства $\tau_{\leqslant n}X$ можно заменить на гомотопически эквивалентные, чтобы добиться ещё и того, чтобы в (по-прежнему гомотопически коммутативной) диаграмме выше отображения $p_n\colon \tau_{\leqslant n+1}X \to \tau_{\leqslant n}X$ были расслоениями Гуревича. Проверьте, что в таком случае слои отображения p_n являются пространствами типа $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$.

б)* Аналогично докажите, что для любого связного клеточного пространства X и любого $n \geqslant 2$ существуют клеточное пространство $\tau_{\geqslant n}X$ и отображение $\tau_{\geqslant n}\colon \tau_{\geqslant n}X \to X$, такие что:

(1) $(\tau_{\geqslant n})_*\colon \pi_i(\tau_{\geqslant n}X) \to \pi_i(X)$ — изоморфизмы при $i \geqslant n$

(2) $\pi_i(\tau_{\geqslant n}X) = 0$ при $i < n$.

Говорят, что пространство $\tau_{\geqslant n+1}X$ получено из X *«убиванием»* всех гомотопических групп до n-ой.

Докажите, что такое пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности, а отображение — с точностью до гомотопии, и выполнены следующие свойства:

(3) для любого клеточного пространства Y, такого что $\pi_{i<n}(Y) = 0$, и отображения $f\colon Y \to X$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $Y \to \tau_{\geqslant n}X$, замыкающее коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tau_{\geqslant n}X \arrow[r, "\tau_{\geqslant n}"] & X \\ Y \arrow[u, "f"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(4) для любого отображения $f\colon Y \to X$ из клеточного пространства Y такого, что гомоморфизмы $f_*\colon \pi_i(Y) \to \pi_i(X)$ являются изоморфизмами при $i \geqslant n$, существует (единственное с точностью до гомотопии) отображение $\tau_{\geqslant n}X \to Y$, замыкающее коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tau_{\geqslant n}X \arrow[r, "\tau_{\geqslant n}"] \arrow[dr] & X \\ & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(5) каждое отображение $X \to Y$ (единственным образом с точностью до гомотопии) включается в (гомотопически) коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tau_{\geqslant n}X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \tau_{\geqslant n}Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Убедитесь, что построенные отображения можно (единственным образом с точностью до гомотопии) включить в коммутативную (с точностью до гомотопии) диаграмму

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "q_4"] & \\ \tau_{\geqslant 4}X \arrow[d, "q_3"] \arrow[ddr, bend left, "\tau_{\geqslant 4}"] & \\ \tau_{\geqslant 3}X \arrow[d, "q_2"] \arrow[dr, "\tau_{\geqslant 3}"] & \\ \tau_{\geqslant 2}X \arrow[r, "\tau_{\geqslant 2}"] & X \end{tikzcd}$$

Пространства $\tau_{\geqslant n+1}X$ называются *n-связными накрытиями* пространства X. Они обобщают (в случае клеточного X) универсальное (1-связное) накрытие. Например, расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$ из 3 задачи первого листочка является 2-связным накрытием сферы S^2.

Проверьте, что диаграмму выше можно заменить на гомотопически эквивалентную так, чтобы отображения $q_n\colon \tau_{\geqslant n+1}X \to \tau_{\geqslant n}X$ были расслоениями Гуревича. Убедитесь, что в таком случае слои отображения q_n являются пространствами типа $K(\pi_n(X), n-1)$.

в)* Докажите, что:

(1) $\tau_{\leqslant n}\tau_{\leqslant n+m}X \simeq \tau_{\leqslant n}X$;
(2) $\tau_{\geqslant n+m}\tau_{\geqslant n}X \simeq \tau_{\geqslant n+m}X$;
(3) $\tau_{\geqslant n}\tau_{\leqslant n+m}X \simeq \tau_{\leqslant n+m}\tau_{\geqslant n}X$;
(4) имеется слабая эквивалентность $\tau_{\geqslant n}X \to \mathrm{hofib}(X \to \tau_{\leqslant n-1}X)$.

То есть, с точностью до (слабой) гомотопической эквивалентности мы имеем расслоение $\tau_{\geqslant n}X \to X \to \tau_{\leqslant n-1}X$. Например, мы получаем $S^3 \simeq \mathrm{hofib}(S^2 = \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty)$ и $\widetilde{X} \simeq \mathrm{hofib}\big(X \to \tau_{\leqslant 1}X = K(\pi_1(X),1)\big)$.

г)* Обобщая предыдущие два пункта, докажите, что для любого отображения $f\colon X \to Y$ между связными клеточными пространствами существует (единственное с точностью до гомотопии) разложение $X \xrightarrow{\tau_{<n}} \tau_n(f) \xrightarrow{\tau_{>n}} Y$, такое что

(1) $(\tau_{<n})_*\colon \pi_i(X) \to \pi_i(\tau_n(f))$ — изоморфизмы при $i < n$ и эпиморфизм при $i = n$ (то есть, отображение $\tau_{<n}$ — n-связно);
(2) $(\tau_{>n})_*\colon \pi_i(\tau_n(f)) \to \pi_i(Y)$ — изоморфизмы при $i > n$ и мономорфизм при $i = n$ (то есть, отображение $\tau_{>n}$ — *n-косвязно*);
(3) композиция $\tau_{>n} \circ \tau_{<n}$ гомотопна f.

Причём, если есть другое разложение $X \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} Y$, такое что композиция ba гомотопна f и отображение b является n-косвязным, то существует единственное с точностью до гомотопии отображение $\tau_n(f) \to Z$, замыкающее коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_{<n}"] \arrow[dr, "a"'] & \tau_n(f) \arrow[r, "\tau_{>n}"] \arrow[d] & Y \\ & Z \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Аналогично, если есть другое разложение $X \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} Y$, такое что композиция ba гомотопна f, и отображение a является n-связным, то существует (единственное с точностью до гомотопии) отображение $Z \to \tau_n(f)$, замыкающее коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_{<n}"] \arrow[dr, "a"'] & \tau_n(f) \arrow[r, "\tau_{>n}"] & Y \\ & Z \arrow[u] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Наконец, все эти отображения опять же можно сложить (единственным с точностью до гомотопии образом) в коммутативную с точностью до гомотопии диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, "\pi_2"] & \\ & \tau_2(f) \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\tau_{>2}"] & \\ & \tau_1(f) \arrow[dr, "\tau_{>1}"] & \\ X \arrow[uur, bend left, "\tau_{<2}"] \arrow[ur, "\tau_{<1}"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

(называемую иногда *башней Уайтхеда* отображения f).
Проверьте при этом, что если заменить отображения π_i на расслоения, то слоем π_n будет пространство типа $K(\pi_n(\mathrm{hofib}(f)), n)$.

18. Для расслоения Гуревича $p\colon E \to B$ и подпространства $A \subset B$ докажите, что p индуцирует изоморфизмы $\pi_n(E, p^{-1}(A)) \to \pi_n(B, A)$.

19. Докажите, что для любого клеточного пространства X «бесконечная надстройка» $\Sigma^\infty X := \bigcup_{k\geqslant 0}\Sigma^k X$ (объединение возрастающей цепочки $X \subset \Sigma X \subset \Sigma^2 X \subset \cdots$) стягиваема.

20. а)* Докажите, что (для линейно связного X) множества $\pi_{i\leqslant n}(X)$ конечны $\iff$ множества $[Z, X]$ конечны для всех клеточных Z с $\dim Z \leqslant n$.
б) Докажите, что связное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно клеточному пространству, у которого все остовы конечны $\iff$ группы $\pi_i(X)$ конечно порождены, а $\pi_1(X)$ — ещё и конечно представлена.
в)* Докажите, что связное клеточное пространство X гомотопически эквивалентно счётному клеточному пространству $\iff$ все группы $\pi_i(X)$ счётны.

21.* Докажите, что для любой группы G и любой последовательности G-модулей $\{A_n\}_{n\geqslant 2}$ существует пространство X с $\pi_1(X) \cong G$ и $\pi_n(X) \cong A_n$ как G-модули.

22. а) Приведите пример склеек $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \cup_A Y \end{tikzcd}$ и $\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & X' \cup'_A Y' \end{tikzcd}$ и гомотопических эквивалентностей $A \xrightarrow{\simeq} A'$, $X \xrightarrow{\simeq} X'$, $Y \xrightarrow{\simeq} Y'$, таких что индуцированное отображение $X \cup_A Y \to X' \cup_{A'} Y'$ не является даже слабой эквивалентностью.
б)* Докажите однако, что если в условиях пункта а) одно из отображений $A \to X$ и $A \to Y$ и одно из отображений $A' \to X'$ и $A' \to Y'$ являются (замкнутыми) корасслоениями, то индуцированное отображение $X \cup_A Y \to X' \cup_{A'} Y'$ является гомотопической эквивалентностью.
в)* Аналогично, если одно из отображений $A \to X$ и $A \to Y$ и одно из отображений $A' \to X'$ и $A' \to Y'$ являются вложениями клеточных подпространств, а отображения $A \xrightarrow{\simeq} A'$, $X \xrightarrow{\simeq} X'$ и $Y \xrightarrow{\simeq} Y'$ — слабыми эквивалентностями, то индуцированное отображение $X \cup_A Y \to X' \cup_{A'} Y'$ также является слабой эквивалентностью.
г) Приведите пример пуллбэков $\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & B \end{tikzcd}$ и $\begin{tikzcd} X' \times_{B'} Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$ и гомотопических эквивалентностей $B \xrightarrow{\simeq} B'$, $X \xrightarrow{\simeq} X'$, $Y \xrightarrow{\simeq} Y'$, таких что индуцированное отображение $X \times_B Y \to X' \times_{B'} Y'$ не является слабой эквивалентностью.
д)* Докажите, что если (в условиях пункта г)) одно из отображений $X \to B$ и $Y \to B$ и одно из отображений $X' \to B'$ и $Y' \to B'$ являются расслоениями Гуревича, то индуцированное отображение $X \times_B Y \to X' \times_{B'} Y'$ является гомотопической эквивалентностью.
е)* Аналогично, если одно из отображений $X \to B$ и $Y \to B$ и одно из отображений $X' \to B'$ и $Y' \to B'$ являются расслоениями Серра, а отображения $B \to B'$, $X \to X'$ и $Y \to Y'$ — слабыми эквивалентностями, то индуцированное отображение $X \times_B Y \to X' \times_{B'} Y'$ является слабой эквивалентностью.

Эти примеры показывают, что хотя обычные (ко)пределы в категории топологических пространств не гомотопически инвариантны, при некоторых условиях они таковыми являются. Оказывается, любую диаграмму можно заменить на гомотопически эквивалентную так, чтобы её (ко)предел был гомотопически инвариантным. Это приводит к понятию *гомотопических (ко)пределов.*