ВШЭ, риманова геометрия. Листок 4.
Геодезические-III. Кручение, тензор Римана. 27.02.2025.

Задача 1. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 2. Докажите, что центрированные в точке p координаты $x^1, \ldots,$ x^n, определённые в окрестности U, являются геодезическими координатами, центрированными в точке p, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, геодезические, проходящие через точку p, имеют вид $x^i = a^i t$.*

Задача 3. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM \mid |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 4. Доказать, что для произвольной связности ∇ кручение

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

билинейно (над функциями), то есть кручение является тензором типа $\binom{1}{2}$.

Задача 5. Доказать, что для произвольной связности ∇ тензор Римана

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

трилинейно (над функциями), то есть тензор Римана на самом деле является тензором типа $\binom{1}{3}$.

Задача 6. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита ∇ является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X)$.

Задача 7. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть K гауссова кривизна M. Доказать, что в данном случае

- $\mathrm{Ric}(X, Y) = K\langle X, Y\rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = K g_{ij}$,
- скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 8. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 9. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Доказать, что секционная кривизна K_{T_AM} равна гауссовой кривизне в точке A.

Задача 10. Пусть g риманова метрика на многообразии M, по которой строится связность Леви-Чивита, а X — векторное поле. Выразить производную Ли $L_X g$ через ковариантные производные.